



ZAHLEN, ZÄHLEN, RECHNEN – MATHEMATIK ENTDECKEN

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

PARTNER

Helmholtz-Gemeinschaft

Siemens Stiftung

Dietmar Hopp Stiftung

Deutsche Telekom Stiftung

STIFTUNG „HAUS DER KLEINEN FORSCHER“

Die Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ hat sich ein großes Ziel gesetzt: Sie möchte allen Kindern im Kita- und Grundschulalter die alltägliche Begegnung mit naturwissenschaftlichen, mathematischen und technischen Themen ermöglichen.

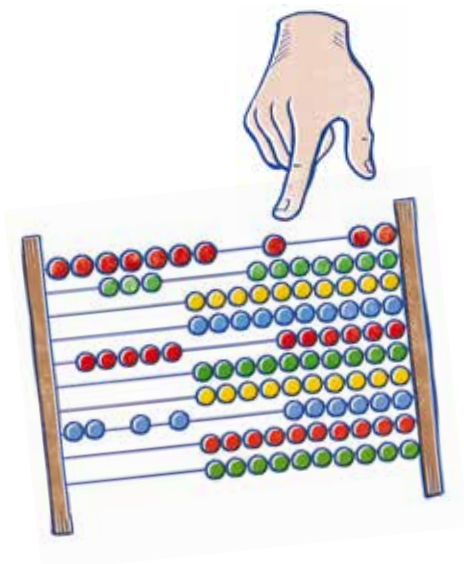
Mit einem bundesweiten Fortbildungsprogramm, Materialien und immer neuen Ideen unterstützt die Stiftung pädagogische Fach- und Lehrkräfte dabei, Kinder qualifiziert beim Forschen zu begleiten und damit ihre Entdeckerfreude zu stärken.

Das gemeinsame Forschen der Mädchen und Jungen mit ihren Lernbegleiterinnen und Lernbegleitern sowie das Lernen selbst werden ein Teil ihres Alltags. Neben dem naturwissenschaftlichen, mathematischen und technischen Verständnis werden dabei auch Sprach-, Lern-, Personal- und Sozialkompetenzen sowie die Feinmotorik gefördert.

Mit ihren Angeboten trägt die Stiftung so zur Stärkung der Bildung von Kindern im Kita- und Grundschulalter bei und damit zugleich zur Nachwuchssicherung in den natur- und ingenieurwissenschaftlichen sowie in den technischen Berufen in Deutschland.

Die Fortbildungen und Materialien der Stiftung basieren auf den Vorgaben der Bildungs- und Rahmenlehrpläne der Bundesländer sowie auf aktuellen Erkenntnissen der Frühpädagogik, Entwicklungspsychologie, Lernforschung und Fachdidaktiken. Zudem fließen praktische Erfahrungen und inhaltliche Anregungen ein, die während der Fortbildungen sowie bei regelmäßigen Besuchen in Kitas, Horten und Grundschulen gewonnen werden.

Partner der Stiftung sind die Helmholtz-Gemeinschaft, die Siemens Stiftung, die Dietmar Hopp Stiftung und die Deutsche Telekom Stiftung. Gefördert wird sie vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.



2 Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

4 Grußwort

5 Über die Broschüre

6

„ZAHLEN, ZÄHLEN, RECHNEN“ IN KITA, HORT UND GRUNDSCHULE

7 Anknüpfungspunkte im Alltag

8 Zahlen

9 Zählen

10 Rechnen

12 „Zählen, Zahlen, Rechnen“ in den Bildungs- und Rahmenlehrplänen

14

DER BLICK VOM KIND AUS

15 Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen

16 Kinder denken anders ...

20

ALS LERNBEGLEITUNG MATHEMATISCHES DENKEN UNTERSTÜTZEN

21 Der Mathematikkreis – Kinder beim mathematischen Forschen begleiten

26

ANREGUNGEN FÜR DIE PÄDAGOGISCHE PRAXIS

27 Zahlen sind überall!

28 Wer hat Lust zu spielen?

40 Ein Blick über den Tellerrand

48 Zahlenmuster

54

WISSENSWERTES FÜR INTERESSIERTE ERWACHSENE

55 Hat das Zählen ein Ende?

56 Malnehmen mal anders

57 Die Musik-Formel

58 Besondere Zahlen

60 Wie Mathematik in unsere Sprache kommt

61 Ein Interview über die Zehn

62 Glossar

64 Literaturverzeichnis, Lesetipps und Links

66 Danksagung, Impressum

GRUSSWORT



Liebe Pädagogin, lieber Pädagoge,



wenn ich an frühkindliche Bildung von Mädchen und Jungen im Bereich Mathematik denke, dann kommt mir immer auch ein Bauernhof-Kindergarten in den Sinn, den ich bereits mehrfach besucht habe. Die Kinder dort kümmern sich um Hasen, Gänse, Schafe und Hühner. Als Erstes öffnen sie jeden Morgen eine Klappe des Hühnerstalls, um die Hühner auf die Wiese zu lassen. Eines nach dem anderen verlassen die Tiere den Stall, dabei werden sie von den Mädchen und Jungen einzeln gezählt. Anschließend werden die frisch gelegten Eier aus dem Stroh genommen und die Kinder sortieren sie nach Größe und zählen auch sie.

Dieses Beispiel zeigt für mich deutlich, dass Zahlen zur Alltagswelt der Kinder dazugehören. Eigentlich vergeht kaum ein Tag, an dem sie es nicht mit Zahlen zu tun haben: Sie ziehen sich zwei Socken und zwei Schuhe an, zählen nach, wie viele Bonbons in der Süßigkeitendose sind, benötigen eine Sechs, um beim „Mensch ärgere Dich nicht“ aus dem Haus zu können, und zählen die Tage bis zu ihrem Geburtstag. Um es kurz zu sagen: Ein Leben ohne Zahlen ist undenkbar. Sie sind für unseren Alltag so selbstverständlich, dass wir uns ihrer oft gar nicht mehr bewusst sind. Möchten Sie gemeinsam mit den Kindern die Welt der Zahlen entdecken und erforschen, so kann das ganz nebenbei passieren: „Beim Anziehen brauchst du zwei Socken und zwei Schuhe – was brauchst du denn noch zweimal? Was nur einmal und was mehrmals?“ Sie müssen nichts weiter tun, als die Augen offen zu halten und die Mädchen und Jungen in Ihrer Einrichtung zu beobachten. Kinder sind interessiert und neugierig und eine Gelegenheit für gemeinsames mathematisches Forschen ergibt sich so sicherlich wie von selbst.

Mit dieser Broschüre möchten wir Ihnen zeigen, wie vielfältig die Forschungsanlässe im Bereich „Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken“ sind und wie Sie diese in Ihrer pädagogischen Arbeit mit den Mädchen und Jungen aufgreifen können. Wir wollen Sie ferner dafür sensibilisieren, wie kreativ und schlau die kindliche Sicht auf Dinge oftmals ist, auch wenn diese für uns Erwachsene erst mal „falsch“ erscheint. Schauen wir nämlich genau hin, so erkennen wir eines: Kinder denken zwar anders – aber meistens ganz logisch.

Wir wünschen Ihnen viel Spaß auf Ihrer gemeinsamen Reise in die Welt der Zahlen!

Michael Fritz

Vorstand der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

ÜBER DIE BROSCHÜRE

„Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken“ ist ein mathematischer Themenbereich, der eng mit unserer Alltagswelt verknüpft ist. Zahlen sind aus unserem täglichen Leben nämlich nicht wegzudenken. Sie kommen in unserem Alter und Geburtsdatum vor, wir tippen sie ins Telefon oder haben sie im Kopf, wenn wir einen $\frac{3}{4}$ -Takt klopfen. Entstanden sind Zahlen vor vielen Tausend Jahren durch Fragen, wie z. B.: „Sind alle Schafe aus der Herde da?“ Aus den anfänglichen Kerben und Ritzen in Knochen oder Holz sind auf verschiedenen Teilen der Erde die unterschiedlichsten Zahlensysteme entstanden. Kindliche Äußerungen, wie z. B.: „Wie, nur zwei Gummibärchen? Ich möchte mehr.“, machen deutlich, dass Kinder schon sehr früh in die Welt der Zahlen eintauchen. Das passiert ganz automatisch, wenn sie sich und ihre Umgebung erkunden. Ihre Alltagswelt bietet also eine Menge Anlässe, spannenden Fragen rund um das Thema nachzugehen. Durch eine spielerische pädagogische Begleitung gelingt es zudem, den Mädchen und Jungen eine systematische Vorgehensweise nahezubringen, ohne ihren mathematischen Forscherdrang zu bremsen.

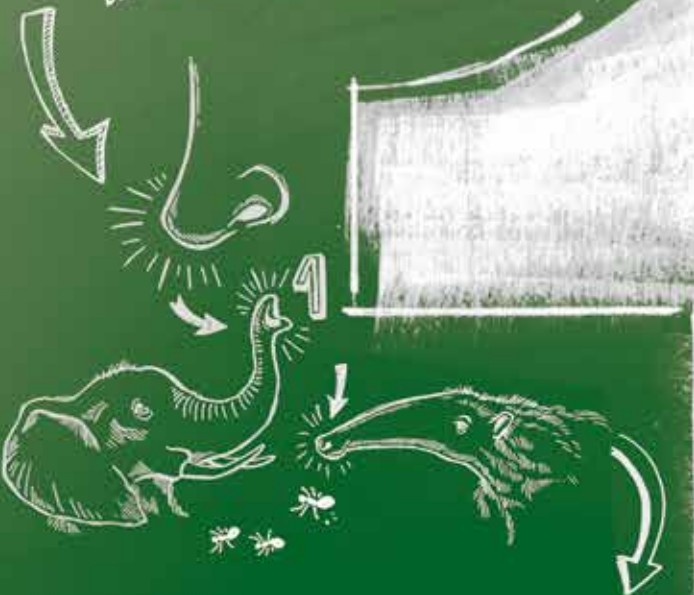
Mit der vorliegenden Broschüre möchten wir Sie darin unterstützen, die zahlreichen Forschungsanlässe in Ihrem pädagogischen Alltag mit den Kindern zu erkennen und spielerisch aufzugreifen. Sie gliedert sich in fünf Teile: Nach einem fachlichen Einblick in die Themen „Zahlen“, „Zählen“ und „Rechnen“ und deren Bezüge zu den Inhalten der Bildungs- und Rahmenlehrpläne wendet sich die Broschüre dem „Blick vom Kind aus“ zu. Wie entwickelt sich die Zahlvorstellung bei Kindern? Wie zählen sie z. B., wenn sie die „richtige“ Bezeichnung für Zahlen noch nicht kennen? Im Beitrag von Prof. Dr. Christoph Selter erfahren Sie an vielfältigen Beispielen, wie kreativ die Lösungswege der Mädchen und Jungen oftmals sind und dass die kindliche Logik in sich durchaus schlüssig ist, auch wenn wir sie erst mal nicht verstehen. Der dritte Teil widmet sich dem Mathematikkreis, der in Anlehnung an den Forschungskreis für das systematische Forschen mit Kindern im Bereich der Mathematik von der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“ und Experten aus der Fachdidaktik und Fachwissenschaft entwickelt wurde. Die Phasen des kindlichen Forschens werden an Beispielen aus der Praxis erläutert, ebenso orientieren sich die Praxisideen im anschließenden Praxiskapitel am Mathematikkreis. Die Broschüre endet mit wissenswerten Hintergrundinformationen, einem Glossar und Literaturempfehlungen.

Wir wünschen Ihnen viel Spaß beim Lesen und zahlreiche spannende Anregungen für Ihre pädagogische Arbeit.



NUR EINS

NUR EINS WILL ICH SAGEN,
GLEICH ZU BEGINN:
ICH HAB' NUR EINE NASE, ICH HAB' NUR EIN KINN,
NUR EINEN RÜCKEN UND AUCH NUR EINEN PO.
ABER WEM ERZÄHL ICH DAS?
DAS WEISST DU SOWIESO!



NOCH EINS WILL ICH DIR SAGEN, DOCH DAS
WEISST DU AUCH:
DU HAST NUR EINEN HALS UND DU HAST
NUR EINEN BAUCH.
NUR DIE EINE ZUNGE, NUR DEN EINEN MUND.
HÄTTEST DU EIN PAAR DAVON, WÄR'DAS
NICHT SEHR GESUND!



NOCH EINS WILL ICH SAGEN,
ICH MACH' JETZT KEINEN SCHERZ:
FÜHL' MAL BITTE NACH: DU HAST NUR
EIN HERZ.

MEHR ALS EINS WÄR' KOMISCH.



WIE SAGT MEIN ONKEL HEINZ?
„EIN EINHORN HAT NUR EIN HORN,
DENN EIN EINHORN BRAUCHT NUR EINS.“
VON DIR GIBT'S NUR EINEN, VON MIR
GIBT'S NUR MICH.
ICH HAB' NUR EINEN KÖRPER.
DAS GLEICHE GILT FÜR DICH!



QUELLE:

NACH METCALF, R., RÖCKENER, A. (2005)

„ZAHLEN, ZÄHLEN, RECHNEN“ IN KITA, HORT UND GRUNDSCHULE

ANKNÜPFUNGSPUNKTE IM ALLTAG

Mathematik umgibt uns überall. Vielleicht fällt es nicht auf den ersten Blick auf, aber wir nutzen Zahlen ständig in unserem Alltag. Wir bezahlen Rechnungen, zählen und rechnen beim Einkaufen, informieren uns über Statistiken, fällen möglicherweise Entscheidungen auf Grundlage von Berechnungen etc. Die Fähigkeiten des Zählens, Schätzens und Rechnens sind daher grundlegend, um in unserer Welt zurechtzukommen. Zahlen dienen uns auch zur Orientierung. Sie begegnen uns z. B. als Busnummern, Hausnummern, auf Fahrplänen, als Maßangaben, Angebote und Preise, Zeitangaben oder in Form anderer vielfältiger Informationen.

Auch in Kita, Hort und Grundschule werden die Kinder ständig mit Zahlen konfrontiert. Wie viele Mädchen und Jungen sind heute da? Wie viele fehlen? Wie viele Kinder haben Platz auf der Bank? Wie viele Bänke passen um den Tisch? Finden dann alle Mädchen und Jungen Platz auf den Bänken? Wie viele Becher Tee trinkt ein Kind und wie viele die ganze Gruppe? Wie viele der Zutaten brauchen wir dann für den Kinderpunsch? Wie viele Teller, Löffel und Gläser brauchen wir noch, um den Tisch fertig zu decken. Für jedes Kind gibt es eine Zahnbürste, einen Kleiderhaken, zwei Socken, zwei Gummistiefel und zwei Handschuhe. Ob die gleiche Freundschaftskette geflochten werden soll oder Kuchen und Waffeln geteilt werden müssen, die Mädchen und Jungen machen schon in der Kita vielfältige Grunderfahrungen mit Mengen und Zahlen sowie zum Rechnen – Hinzufügen und Dazukommen (Vereinigung), Wegnehmen und Abnahme, Vervielfachung und Mehrfachheit – und zum Teilen (Aufteilen und Verteilen).

Beim Spielen zählen und rechnen die Kinder ebenfalls ganz automatisch. Ob es das „... 7, 8, 9, 10, ich komme!“ beim Verstecken spielen, das 2:1 beim Fußball, das Aushandeln von Spielregeln ist, die Mädchen und Jungen benutzen Zahlen, sie zählen und rechnen. Wie viele Reifen nehmen wir mit raus, damit jedes Kind einen bekommt? Wer ist als Nächstes dran? Wie viel Mal darf ich werfen? Auf dem Pausenhof treiben Schulkinder Handel mit Karten, Figuren etc. Dazu ist es nötig, mit Zahlen umzugehen: zu zählen, zu vergleichen und zu überschlagen.



Wiebkes Waage:
Ein Spiel zu den Themen
„Zahlen und Größen“ auf
www.meine-forscherwelt.de

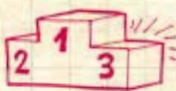
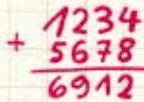


ZAHLEN

Grundlage des Zählens und Rechnens ist die Idee der Zahl. Zahlen können auf verschiedene Weise erfahren werden.¹ Die Zahl Zwei kann ich beispielsweise real als konkrete Gegenstände, z. B. als zwei Äpfel, erleben. Zwei Äpfel kann ich anfassen, fühlen, riechen oder ich stelle sie mir vor und sehe ein Bild der beiden Gegenstände vor meinem inneren Auge. Ich kann mir die Zahl Zwei auch als Menge vorstellen. Diese Menge besteht aus zwei Elementen. Sie ist genau um ein Element größer als die Menge eins und um ein Element kleiner als die Menge drei.

Die Zwei lässt sich auch als Symbol, als Zahlzeichen „2“, numerisch darstellen. Die Zahl Zwei ist so völlig unabhängig vom Gegenstand oder einer Handlung.

Zahlen begegnen uns außerdem in verschiedenen Kontexten. Wir nutzen sie für unterschiedliche Zwecke. Man spricht auch von unterschiedlichen Zahlaspekten.²

ZAHLASPEKT	HINTERGRUND	BEISPIEL	FRAGE
Kardinalzahlaspekt	Zahlen beschreiben die Mächtigkeit von Mengen, also die Anzahl der Elemente einer Menge.		Wie viele?
Ordinalzahlaspekt (Zählzahl)	Folge der natürlichen Zahlen, die beim Zählen durchlaufen wird		Welche?
Ordinalzahlaspekt (Ordnungszahl)	Gibt den Rangplatz eines Elements in einer geordneten Folge an		Welcher Platz?
Maßzahlaspekt	Maßzahlen in Größenangaben	3 kg	Wie schwer?
Operatoraspekt	Zahlen beschreiben, wie oft etwas passiert ist; Vielfachheit.	3 x SCHLAFEN 	Wie oft?
Rechenzahlaspekt (algebraisch)	Zahlen werden zum Rechnen genutzt; Gesetzmäßigkeiten der natürlichen Zahlen.	2 + 3 = 3 + 2	Wie viel ist ...?
Rechenzahlaspekt (algorithmisch)	Mit Zahlen wird ziffernweise nach eindeutig bestimmten Folgen von Handlungsanweisungen gerechnet.		Wie viel ist ...?
Relationaler Zahlaspekt	Zahlen als Relationen durch Zahlbeziehungen	1 - 3 - 4 	Was?
Codieraspekt	Zahlen dienen dazu, Dinge zu benennen und zu unterscheiden.		Wie lautet?

¹ Vgl. Lehmann, W. et al. (2006), S. 6–14

² Vgl. Padberg, F., Benz, C. (2011), S. 13–25



ZÄHLEN

Grundlage des Zählens ist der Gedanke der Reihenfolge, die Tätigkeit, Reihen zu bilden. Dabei vergleichen und ordnen wir. Um eine Anzahl zu bestimmen, wird gezählt. Die Kinder lernen die Zahlwortreihe oder Teile dieser als Wörter kennen, die in immer gleicher Reihenfolge in verschiedenen Zusammenhängen fallen. Ihnen begegnet die Zahlwortreihe außerdem in verschiedenen Liedern und Reimen. So wird den Mädchen und Jungen die immer gleichbleibende Reihenfolge eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs ... vertraut. Die Kinder müssen allerdings nicht nur diese Reihenfolge der Zahlwörter verinnerlichen, um zählen zu können, sondern darüber hinaus ist das Verständnis von weiteren Prinzipien nötig.

ZÄHLPRINZIPIEN ³	
Das Eindeutigkeitsprinzip Jedem der zu zählenden Gegenstände wird genau ein Zahlwort zugeordnet.	
Das Prinzip der stabilen Ordnung Die Reihe der Zahlwörter hat eine feste Ordnung.	
Das Kardinalzahlprinzip Das zuletzt genannte Zahlwort beim Zählprozess gibt die Anzahl der Elemente der abgezählten Menge an.	
Das Abstraktionsprinzip Die Zahlprinzipien eins bis drei können auf jede beliebige Menge angewandt werden, d. h., es kommt nicht darauf an, welcher Art die Objekte sind, die gezählt werden.	
Das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte ist für das Zählergebnis irrelevant.	

Zum richtigen Zählen gehört also viel mehr als das Auswendiglernen der Zahlwortreihe. Um schnell voranzukommen, zählen erfahrene Kinder in Schritten. Schwieriger wird es für die Mädchen und Jungen beim Rückwärts- und Weiterzählen.

Kleine Mengen müssen irgendwann nicht mehr gezählt werden. Man sieht auf einen Blick, wie viele Gegenstände es sind. Sind die Objekte geordnet, können auch größere Mengen simultan erfasst werden.

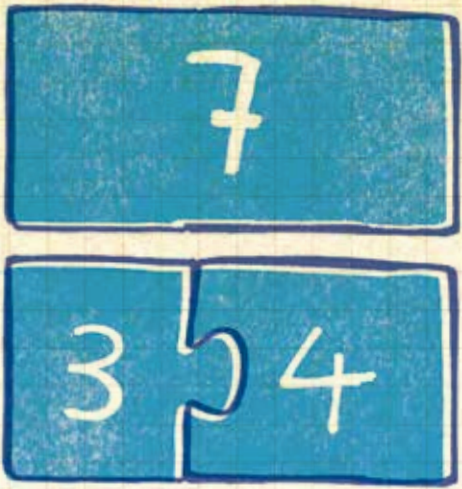
³ Vgl. Gelman, R., Gallistel, C. R. (1978), in: Padberg, F., Benz, C. (2011), S. 9

RECHNEN

Die Kinder machen erste Grunderfahrungen im Rechnen in Situationen des Vergleichens, Vermehrens und Verminderns. Ob beim Ankommen und Abholen, im Morgenkreis, beim Spielen oder Essen, drinnen oder draußen: Die Mädchen und Jungen erleben ständig, wie sich Mengen verändern. Eine besonders wichtige Rolle als Grunderfahrung zum Rechnen spielt außerdem die Beziehung des Ganzen zu seinen Teilen.

Verbinden die Kinder Erfahrungen zum Ganzen und seiner Teile mit dem Zählen, bauen sie ein Verständnis davon auf, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind⁴: Ein Viererpack lässt sich dann neben dem Bild von vier Einzelnen als zwei Einer und einem Zweier, einem Einer und einem Dreier oder als zwei Zweier sehen. Die Grundstruktur „Teil-Teil-Ganzes“ nutzen die Mädchen und Jungen später, um Additions- und Subtraktionsaufgaben zu lösen. Diese Vorstellung bildet nämlich die Grundlage für flexibles Rechnen, um sich z. B. Schritt für Schritt vom „Alles-zählen-Müssen“ zu lösen.

EIN GANZES UND SEINE TEILE



$3 + 4 = 7$
 $4 + 3 = 7$
 $7 - 3 = 4$
 $7 - 4 = 3$

- Bilden eines Ganzen aus Teilen
- Zerlegen eines Ganzen in Teile
- Bestimmen von Teilen aus gegebenem Ganzen und einem Teil

EINEN TEIL VERÄNDERN

- Veränderungen an nur einem Teil des Ganzen verursachen entsprechende Veränderungen des Ganzen.



DAS GANZE BLEIBT GLEICH

- Das Ganze bleibt unverändert, wenn Elemente von einem Teil zum anderen verschoben werden.



BEKANNTES NUTZEN

- Herleitung von Ergebnissen durch die Kombination mit bekannten Grundaufgaben ($3 + 4 = 7 \rightarrow 13 + 4 = 17$)





5 + 5 gleich 10

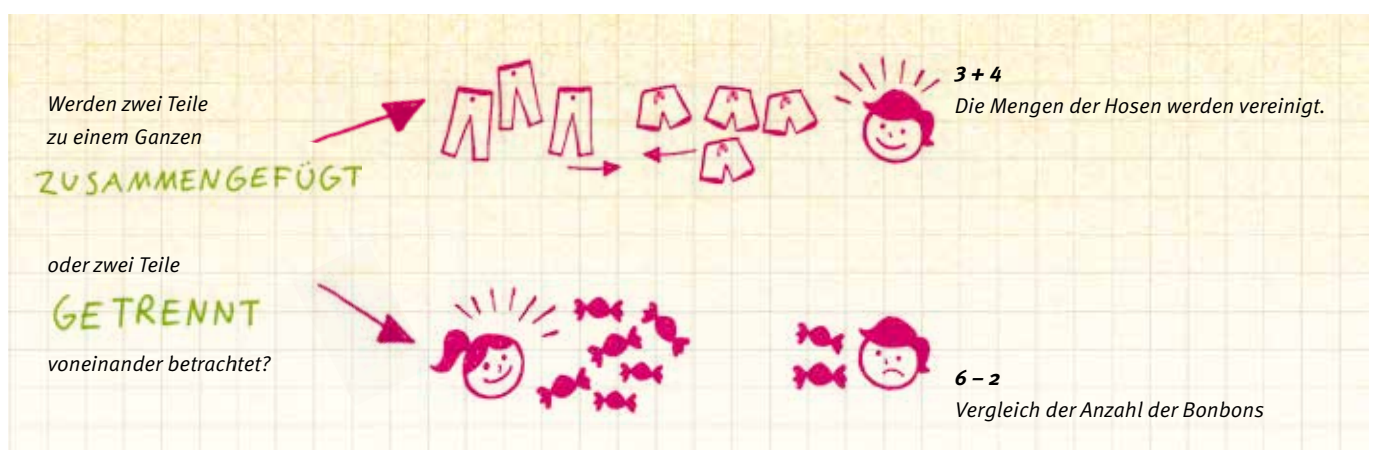
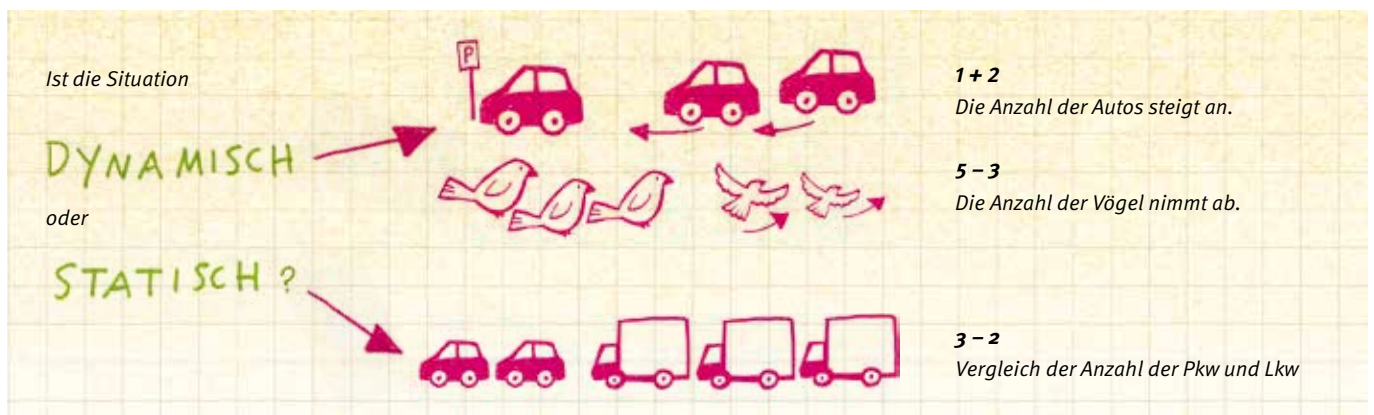
EXKURS: DIE KRAFT DER 5

Die Finger und Hände der Kinder können beim Aufbau von Zahlvorstellungen helfen, denn anhand der fünf Finger einer Hand und der zehn Finger beider Hände können Zahlenbilder und Zerlegungen dargestellt werden.

Unser Zahlensystem hat eine Zehnerstruktur. Die Fünf und die Zehn spielen deshalb zur Orientierung in Zahlenräumen eine wichtige Rolle. Die Fünfer- und Zehnerzahlen können nämlich als Stufen- bzw. Stützpunktzahlen genutzt werden. So lassen sich z. B. Zehnergruppen schnell zählen – 10, 20, 30, 40 ... – oder plus und minus zehn leicht rechnen. Felddarstellungen unterstützen das Verständnis dieser Zehnerstruktur unseres Zahlensystems. Für die Orientierung und Handlung in Zahlenräumen ist aber auch die Reihendarstellung wichtig. Sie lässt die ordinale Struktur der Zahlen in den Vordergrund treten.

PLUS UND MINUS

Plus und Minus, Addition und Subtraktion, lassen sich z. B. als ein Vorwärts- und Rückwärtsbewegen auf dem Zahlenstrahl verstehen. Bewegen wir uns voran, wird die Zahl größer. Laufen oder springen wir zurück, wird die Zahl kleiner. Neben der Zahlenstrahlvorstellung gibt es noch weitere Ideen, wie sich die Addition und die Subtraktion verstehen lassen. Die jeweiligen Ansätze lassen sich durch verschiedene Merkmale unterscheiden⁵:

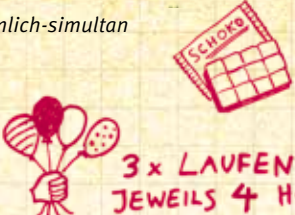


⁵ Vgl. Radatz, H. et al. (2000), S. 77 f.

⁶ Vgl. Grevsmühl, U. (1995), S. 108–133

MAL UND GETEILT

Auch bei Mal und Geteilt, bei der Multiplikation und der Division, gibt es verschiedene Ideen, wie man sich diese Grundrechenarten konkret vorstellen kann:

MEHRMALSDAS GLEICHE ZUSAMMENFÜGEN ODER TEILEN	MIT GRÖSSEN UND STÜCKZAHLEN
Malnehmen: räumlich-simultan oder zeitlich-sukzessiv  3 x LAUFEN JEWEILS 4 HOLEN	3 Regalbretter von jeweils 4 Metern Länge  Der Eintritt kostet 3 Euro, für 4 Kinder zahlen wir 4 mal 3 Euro. 
Teilen: 12 Karten an 4 Kinder verteilen; wie viele Karten bekommt jedes Kind?  Aufteilen: 12 Äpfel in Beutel à 3 Äpfel verpacken; wie viele Beutel werden benötigt? 	KOMBINATIONEN UND MÖGLICHKEITEN 3 verschiedene Shirts und 4 verschiedene Hosen ergeben 12 verschiedene mögliche Outfits. 
STRECKEN UND DEHNEN Das Kaugummi wird um das 3-Fache seiner Länge gestreckt. 	

„ZAHLEN, ZÄHLEN, RECHNEN“ IN DEN BILDUNGS- UND RAHMENLEHRPLÄNEN

Der Inhaltsbereich „Zahlen, Zählen, Rechnen“ erscheint in allen Plänen als Teil der Mathematik. Er ist in den meisten Rahmenlehrplänen für die Grundschule unter der Bezeichnung „Zahlen und Operationen“ zu finden. In den Bildungsprogrammen der Länder für die Kita sind die Bezeichnungen der Themenbereiche in Mathematik nicht einheitlich. So wird in Bayern z. B. zwischen pränumerischem Bereich, numerischem Bereich sowie sprachlichem und symbolischem Ausdruck mathematischer Inhalte unterschieden. In Berlin dagegen wird Mathematik in Sortieren und Klassifizieren, Muster und Symmetrie, Zahl und Zahlenmengen, Raum und Geometrie, Wiegen, Messen und Vergleichen sowie grafische Darstellung und Statistik unterteilt.

Im Bildungsprogramm für Berlin für die Kitas sind für den Inhaltsbereich „Zahl und Zahlenmenge“ z. B. folgende Grunderfahrungen festgehalten: „Den Zusammenhang zwischen Zahlen und Objekten verstehen, sich dem Sinn von Zahlen nähern, Zahlvorstellungen erwerben, zum Zuordnen und zum Zählen gelangen (Grundzahlen [Kardinalzahlen] – (1, 2, 3 ...) und Ordinalzahlen. 1., 2., 3., Hausnummern 46, 157 ...) und das Wesen der mathematischen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) verstehen.“⁷

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich geben Richtlinien für alle Rahmenlehrpläne der verschiedenen Bundesländer vor. Im Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ werden darin folgende Bildungsstandards für das Ende der vierten Jahrgangsstufe vereinbart:

Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen

- Den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen,
- Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen,
- sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden).

Rechenoperationen verstehen und beherrschen

- Die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen,
- die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen,
- mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden,
- verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten, Rechenfehler finden, erklären und korrigieren,
- Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen,
- schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden,
- Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren.

In Kontexten rechnen

- Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben,
- das Ergebnis auf Plausibilität prüfen,
- bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist,
- Sachaufgaben systematisch variieren,
- einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen.⁸

In den Bildungs- und Rahmenlehrplänen sind also zum einen die einzelnen Inhalte „Zahlen“, „Zählen“ und „Rechnen“ festgehalten. Zum anderen wird in den Plänen die Verbindung der Inhalte mit den „Sachen“, die Anwendung der Zahlen, des Zählens und des Rechnens, in verschiedenen Kontexten thematisiert.

⁷ Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft (Hrsg.) (2014)

⁸ Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005), S. 9



DER BLICK VOM KIND AUS

DIE ENTWICKLUNG MATHEMATISCHER KOMPETENZEN

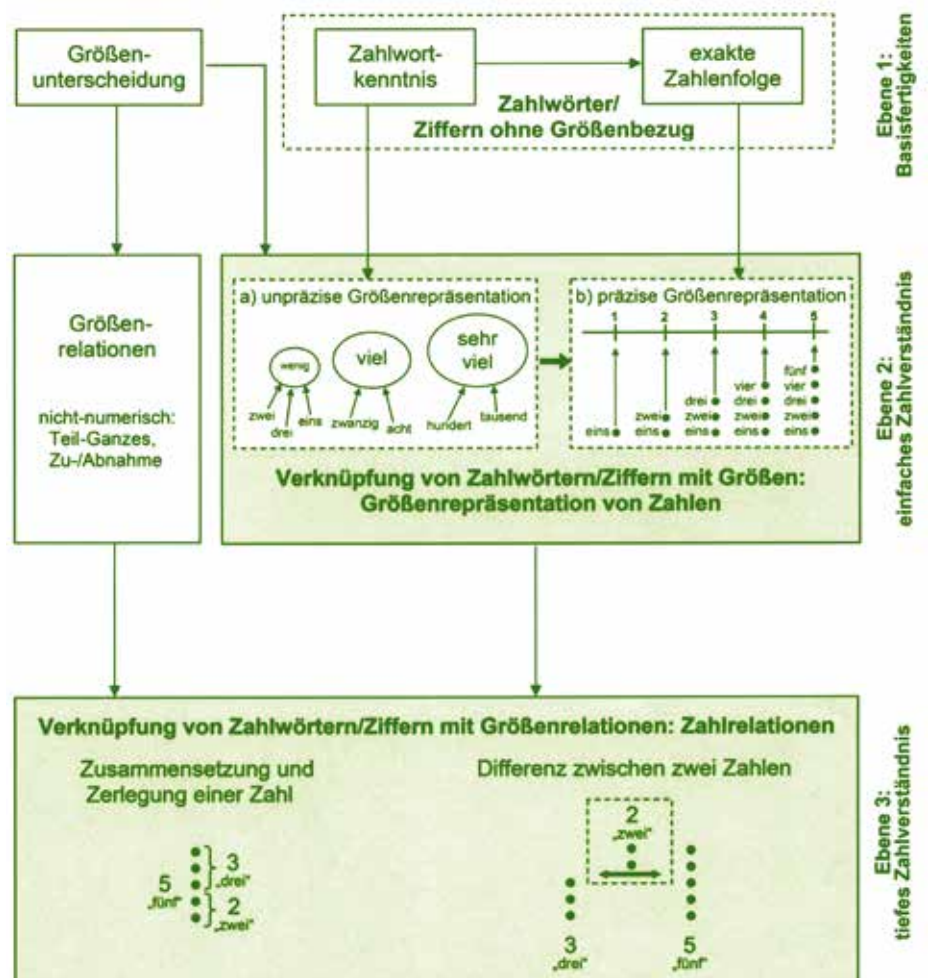
Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bei Kindern beginnt nicht erst mit ihrem Eintritt in die Kita. Schon Säuglinge können beispielsweise verschieden große Mengen unterscheiden.⁹ Solche intuitiven mathematischen Kompetenzen sind Grundlage für den Aufbau des Zahlverständnisses und der Fähigkeiten des Zählens.¹⁰

Im Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung¹¹ von Krajewski wird die Entwicklung mathematischer Kompetenzen von der Geburt der Mädchen und Jungen bis ins Grundschulalter dargestellt. Sie vollzieht sich demnach über drei Ebenen: ausgehend von Basisfertigkeiten über ein einfaches bis hin zu einem tiefen Zahlverständnis.

Das Kind lernt die Zahlwörter kennen. Es hört in Reimen, Liedern und beim Zählen der Erwachsenen immer wieder dieselbe Reihenfolge von Wörtern: eins, zwei, drei, vier ... Außerdem ist es in der Lage, Mehr-weniger-Vergleiche anzustellen.

Das Kind verknüpft nun die Zahlwortreihe mit der Größe der Zahl. In dieser Phase entwickelt sich das Zahlverständnis von „wenig, viel, sehr viel“ zu einer präzisen Kenntnis des Zählens „eins, zwei, drei, vier ...“ weiter.

Parallel dazu bildet sich eine Vorstellung des Ganzen und seiner Teile sowie der Zu- und Abnahme aus. Auf dieser Ebene findet nun die Verknüpfung der Zahlwörter mit diesen Größenrelationen (Teil-Ganzes sowie Zu- und Abnahme) statt. Haben Kinder dieses tiefere Zahlverständnis erlangt, haben sie eine Vorstellung davon, dass sich Zahlen zusammensetzen und zerlegen lassen und dass sie auch als Differenz zwischen zwei Zahlen zu verstehen sind, z. B. die Zwei als der Abstand zwischen drei und fünf.



Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung nach Krajewski (2013)

⁹ Vgl. Lorenz, J. H. (2012), S. 13 ff.

¹⁰ Vgl. Benz, C., Peter-Koop, A., Grüßing, M. (2015), S. 5

¹¹ Vgl. Schneider, W., Küspert, P., Krajewski, K. (2013), S. 25

KINDER DENKEN ANDERS ...

GASTBEITRAG VON PROF. DR. CHRISTOPH SELTER, TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND



Über den Autor

Prof. Dr. Christoph Selter ist Hochschullehrer für Mathematikdidaktik an der Technischen Universität Dortmund und Mitglied des Vorstands des DZLM (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik). Außerdem ist er Autor zahlreicher Publikationen zum Lehren und Lernen von Mathematik in der Primarstufe. Einer seiner Arbeitsschwerpunkte ist die Forschung über die Vorstellungen und Denkwege von Kindern im Grundschulalter.

Wenn ein vierjähriges Kind sagt „Die Kinders gingen weg“, dann reagieren Erwachsene in der Regel sinnvoll. Sie versuchen, den Sinn der Äußerung zu verstehen, wiederholen den Satz grammatikalisch korrekt und bestätigen so das Kind implizit in seinem Bemühen, sich nach und nach die Regeln der deutschen Sprache anzueignen.

Anders sieht es jedoch häufig aus, wenn dasselbe Kind ermittelt: „5 Autos und 3 Autos, zusammen sind das 7 Autos.“ Geht es um Mathematik, tun sich Erwachsene normalerweise schwer, vergleichbar unterstützend zu agieren. Zu wenig ausgeprägt ist die Haltung, auch hier mit den Augen der Kinder zu schauen.



Hundert, einhundert, zweihundert ...

Nachdem der fünfjährige Fynn die Zahlwörter bis 58 fehlerfrei aufgesagt hat, wird er gefragt, ob er denn auch schon ab 94 weiterzählen könne. Er beginnt: „94, 95, 96, 97, 98, 99, hundert“ und fährt dann fort: „Einhundert, zweihundert, dreihundert ...“ So zählt er bis „dreizehnhundert“.

Zunächst einmal ist alles andere als selbstverständlich, dass ein Kind in diesem Alter korrekt bis 100 zählen kann. Interessant sind insbesondere die „regelwidrigen“ Zahlwortbildungen jenseits dieser „Grenze“. Auch wenn es nicht den Anschein hat: Sie gehen auf vernünftiges Denken zurück. Denn viele Kinder zählen irgendwann einmal so wie Fynn. Dabei gehen die meisten von ihnen nicht – wie man vermuten könnte – in Hunderterschritten vor (100, 200, 300 ...), sondern vollbringen eine hoch kreative Leistung.

Denn sie übertragen die Regel für die Zahlwortbildung, die von 13 bis 99 zur Anwendung kommt, auf größere Bereiche. Zuerst werden immer die Einer gesprochen: acht-und-neunzig, neun-und-neunzig, hundert, ein-und-hundert, zwei-und-hundert, drei-und-hundert usw. Das „und“ spricht man ja auch im Hunderterraum häufig kaum merklich aus. Außerdem haben Kinder Zahlwörter wie „hundert“ oder „zweihundert“ oft auch schon von Erwachsenen gehört.

Fähigkeiten, nicht nur Fehler

Wie das Beispiel zeigt, sollten Erwachsene sich verstärkt bemühen, auch in Mathematik die Äußerungen eines Kindes mit dessen Augen wahrzunehmen. Dies nennt man die fähigkeitsorientierte Perspektive. Hier orientiert man sich schwerpunktmäßig an dem, was die Kinder schon können. Man versucht stets, ihre Denkweisen als prinzipiell sinnvoll anzusehen, ihr Vorgehen zu verstehen und dieses den Kindern auch zu signalisieren.¹² Das bedeutet natürlich nicht, dass man ihnen nicht auch zu gegebener Zeit Dinge erklären bzw. mitteilen sollte („Zur nächsten Zahl könnte man auch ‚einhundert‘ sagen, aber man hat entschieden, sie 101 zu nennen.“).

Solche Interventionen unterscheiden sich allerdings vom noch weitverbreiteten „Beibring-Schema“ dadurch, dass sie die Einsicht zum Ausgangspunkt haben, dass Kinder sich bei dem, was sie sagen, in der Regel etwas aus ihrer Sicht Vernünftiges denken – auch wenn es im ersten Moment, ja manchmal auch nach längerem Nachdenken nicht so zu sein scheint.

Die fähigkeitsorientierte Sichtweise kann man idealtypisch von der defizitorientierten Perspektive unterscheiden. Dabei orientiert man sich hauptsächlich an dem, was richtig ist, was die Kinder noch erlernen müssen, was sie falsch machen. Abweichungen von der Norm bewertet man dann als Defizite, die es gilt, schnellstmöglich zu korrigieren („Nein, nein, das stimmt nicht. Es heißt hundert eins, hundert zwei, hundert drei.“) oder besser noch direkt zu verhindern („So weit kannst du noch nicht zählen.“).

Kinder denken anders ...

Richtet man die Wahrnehmung des Denkens und Handelns der Kinder vorrangig an deren Fähigkeiten und weniger an ihren Fehlern aus, so kann man feststellen, dass Kinder nicht selten anders denken ...

- als Erwachsene denken
- als Erwachsene es vermuten
- als Erwachsene es möchten
- als andere Kinder
- als sie selbst in vergleichbaren Situationen.¹³



¹² Vgl. Sundermann, B., Selter, C. (2013)

¹³ Vgl. Spiegel, H., Selter, C. (2014)

Zur exemplarischen Illustration des zweiten Punkts möchte ich die Episode heranziehen, die Anita Winning wie folgt beschreibt:

Die Familie sitzt beim Abendbrot. Der dreieinhalbjährige Fabian zählt seine Häppchen. „Eins – zwei – drei – vier – fünf – sechs – sieben – acht – neun.“ Dann isst er ein „Häppchen“ auf und zählt erneut: „Eins – zwei – drei – vier – fünf – sieben – acht – neun.“ „Du hast die Sechs vergessen“, korrigiere ich ihn. „Es heißt doch fünf – sechs – sieben.“

Die erwachsene Person unterstellt Fabian falsches Denken. Daher verbessert sie ihn, indem sie die korrekte Zahlwortreihe vorsagt. Dass Fabian aber durch das Auslassen der „Sechs“ etwas ganz anderes ausdrücken wollte, wird nur deshalb deutlich, weil er auf seiner Sichtweise beharrt.

Erstaunt sieht er mich an und erklärt: „Nein, die hab’ ich nicht vergessen. Die ist doch schon in meinem Bauch.“¹⁴

Wenn man also ein echtes Interesse daran hat, Kinder zu verstehen, dann stellt man häufig fest, dass sie mehr können, als man ihnen zutraut.¹⁵

5 und 3 ist 7

Ach ja: Und wie sollte man bei „5 und 3 ist 7“ reagieren? Auf keinen Fall sollte man beunruhigt sein. Dass ein vierjähriges Kind eine solche Antwort gibt, ist nicht ungewöhnlich und sogar durchaus bemerkenswert. Denn die Größenordnung stimmt – genauso wie die Äußerung „Die Kinders gingen weg“ ja auch größtenteils korrekt ist. Und das legt die begründete Vermutung nahe, dass dieses Kind schon eine ausbaufähige und für die weitere Lernentwicklung unverzichtbare Grundvorstellung der Addition im Sinne des Zusammenfügens besitzt.

Am Besten äußert man sich dann nicht im Sinne von „Überleg noch mal genauer“ oder „Ne, guck mal hier ...“. Sinnvoller ist es, das Kind zu fragen, wie es auf seine Antwort gekommen ist – und zwar in demselben Tonfall, in dem man fragen würde, hätte es die richtige Antwort gegeben. Dabei kann es hilfreich sein, wenn die Autos oder Gegenstände, die die Autos darstellen können, bereitliegen, so dass das Kind sein Vorgehen erklären oder vormachen kann.

So kann man nicht selten vernünftige Vorgehensweisen mit Weiterentwicklungspotenzial aufspüren. Manche Kinder beispielsweise zählen von der 5 statt von der 6 aus um 3 weiter: 5, 6, 7. Sie machen also fast alles richtig, verwenden allerdings den falschen Ausgangspunkt.



¹⁴ Vgl. Selter, C., Spiegel, H. (1997), S. 112

¹⁵ Vgl. kira.dzlm.de

Das ist der entscheidende Unterschied zur fehlerängstlichen Einstellung vieler Erwachsener: Es ist viel wichtiger, das Kind zu verstehen, als es vorschnell zu belehren. Das vierjährige Kind, das die Antwort „7“ gibt, wird davon genauso wenig einen bleibenden Schaden behalten wie das Kind, das „die Kinders weggingten“ ließ. Um an dieser Stelle nicht falsch verstanden zu werden: Weiterentwicklung bedarf in der Regel der Anregung; Gelassenheit heißt nicht Verzicht auf Interesse und altersangemessene Förderung – dies aber aus fähigkeitsorientierter Perspektive!

Eine Position der Stärke

So wichtig es ist, schon im Elementarbereich die mathematische Entwicklung von Kindern genauer in den Blick zu nehmen, so unverzichtbar ist es nach meinem Dafürhalten auch, verantwortungsvoll mit den Ergebnissen der Beobachtungen umzugehen. Wir sollten aufpassen, dass aus Kindern nicht vorschnell „Risikokinder“ werden. Der Grat zwischen früher Förderung und früher Stigmatisierung ist schmal.

Der größere Kontext: Das Kind in seiner individuellen Entwicklung zu unterstützen und zu stärken, um dann aus einer solchen Position der Stärke weiterlernen zu können und auch die Aufarbeitung von „Defiziten“ anzugehen, ist für das Erlernen von Mathematik eine zentrale Leitidee.¹⁶ Kinder sollen erfahren, dass sie etwas können, und nicht schon früh mit dem Wissen um vermeintliche Mathematikdefizite aufwachsen, die im Übrigen zu einem keineswegs geringen Teil durch unterschiedliche und vollkommen normale Lernentwicklungsunterschiede erklärt werden können. Eine Grundvoraussetzung dafür ist, dass die aus der Erwachsenensicht bisweilen unvollkommen erscheinenden Denk- und Vorgehensweisen von Kindern als Konstruktionsversuche ernst genommen und gewürdigt werden, die ihrem augenblicklichen Lernstand entsprechen.



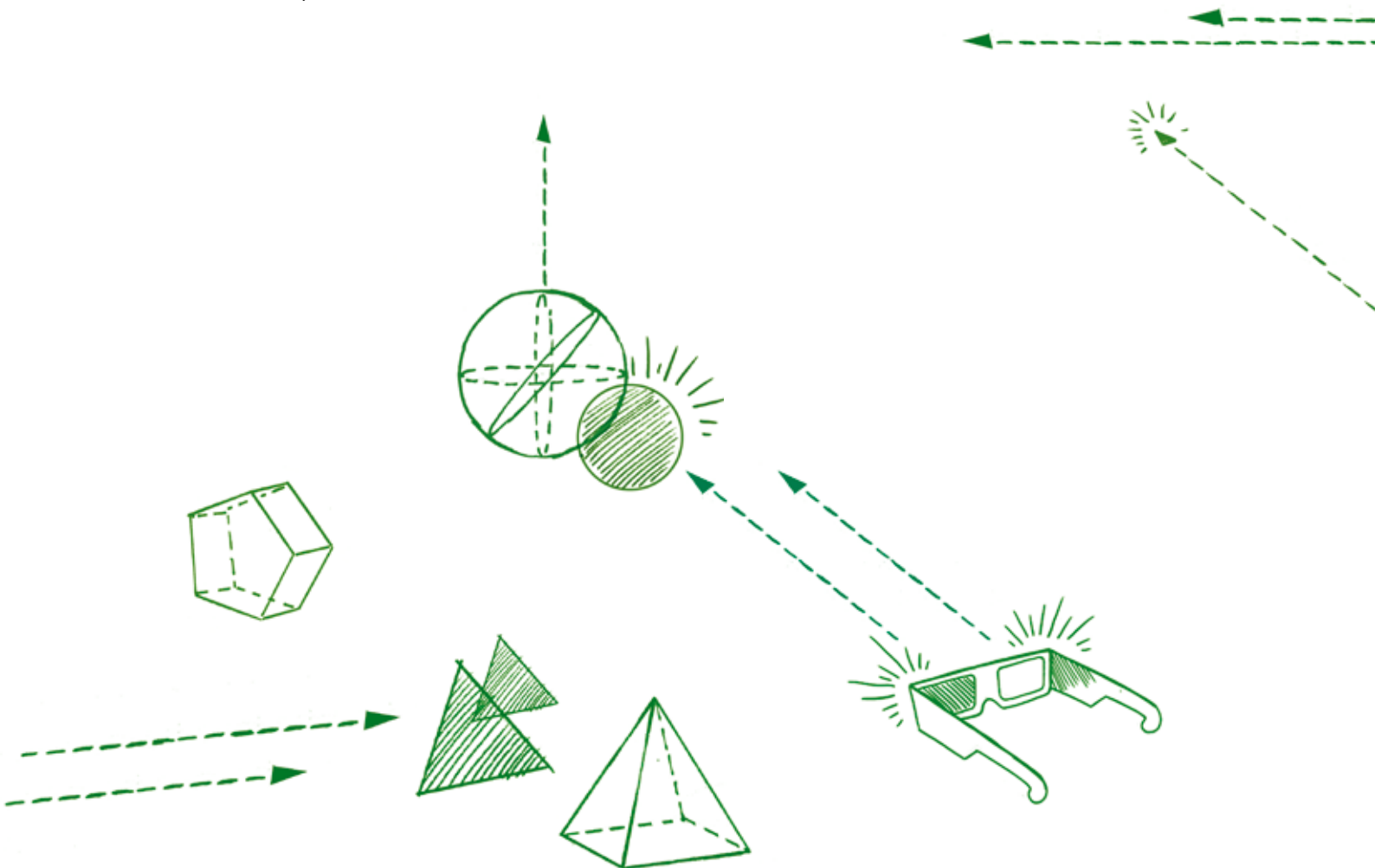
¹⁶ Vgl. pikas.dzlm.de



ALS LERNBEGLEITUNG MATHEMATISCHES DENKEN UNTERSTÜTZEN

DER MATHEMATIKKREIS – KINDER BEIM MATHEMATISCHEN FORSCHEN BEGLEITEN

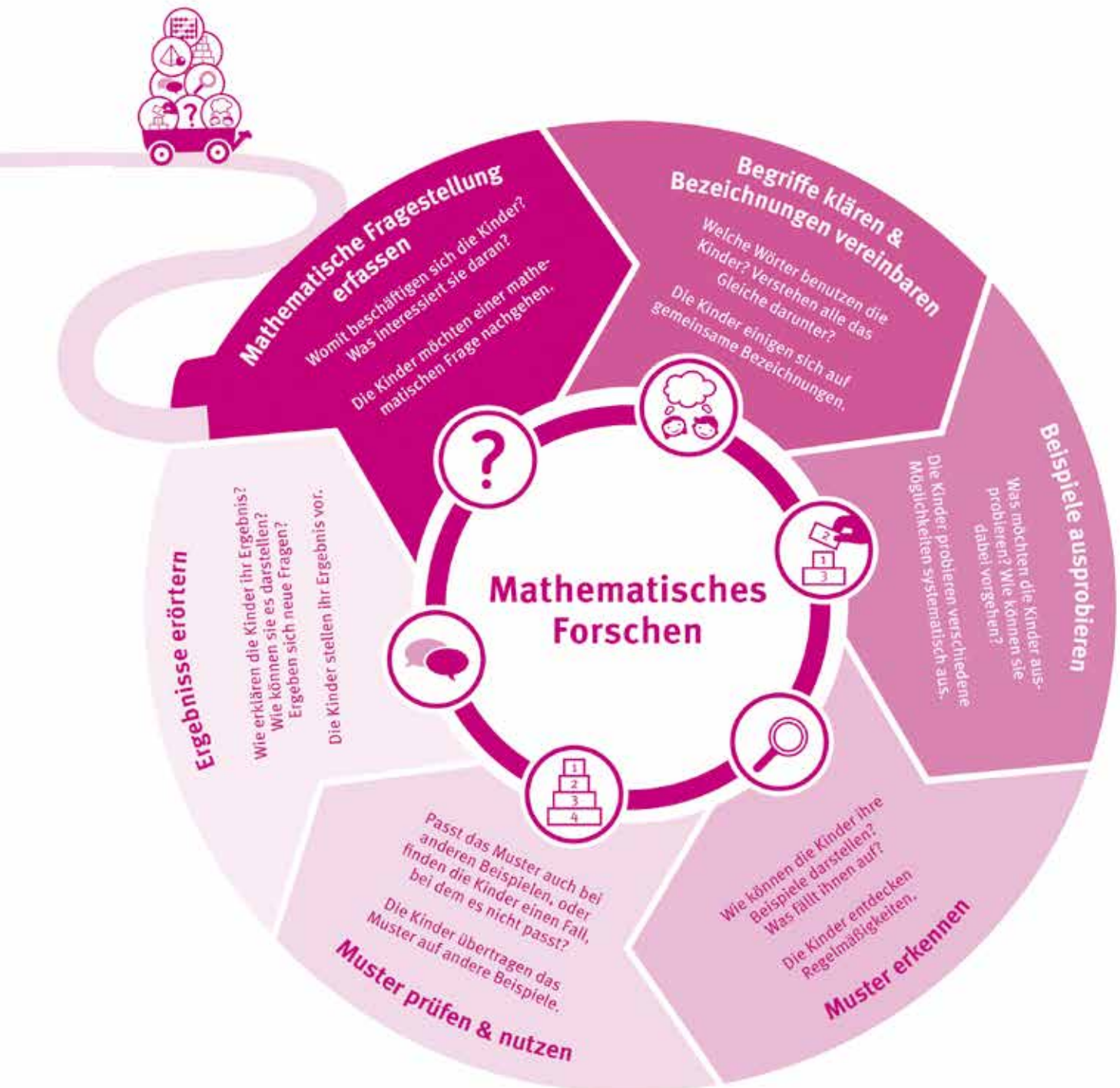
Der Mathematikkreis ist, entsprechend dem Forschungskreis für die Naturwissenschaften, ein Instrument zur Lernbegleitung, das Anregungen liefert, wie Sie mit Kindern mathematischen Fragen systematisch nachgehen können. Er beinhaltet jedoch die Spezifik der Mathematik mit der Leitidee der Muster und Strukturen und betont den Prozess des mathematischen Forschens, indem er die prozessbezogenen Kompetenzen¹⁷ einbezieht. Der Mathematikkreis lässt sich auf den verschiedenen Repräsentationsebenen mathematischen Wissens nach Bruner¹⁸ (EIS-Prinzip) konkretisieren.



¹⁷ Vgl. Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005), S. 7 f.

¹⁸ Vgl. Bruner, J. S. (1974)

DER MATHEMATIKKREIS



Das mathematische Forschen gliedert sich in verschiedene Phasen. Diese können die Kinder enaktiv, ikonisch oder symbolisch durchlaufen.

Bevor die Auseinandersetzung mit einer konkreten mathematischen Frage beginnt, sammeln die Kinder viele Erfahrungen und machen Entdeckungen bzw. Erkundungen im Alltag. Aus diesen können Fragen entstehen, die die Mädchen und Jungen über die Mathematik beantworten können. Der Mathematikkreis hilft Ihnen, die Kinder bei der Beantwortung solcher Fragen zu begleiten. Er gliedert sich in sechs Phasen. Für jede Phase sind Impulsfragen formuliert, die Sie in der jeweiligen Situation unterstützen sollen. Um z. B. die erste Phase zu begleiten, beobachten Sie die Kinder und überlegen Sie: Womit beschäftigen sich die Mädchen und Jungen gerade genau? Was interessiert sie daran? So haben Sie die Möglichkeit, im Handeln der Kinder mathematische Fragen zu erkennen.

MATHEMATISCHE FRAGEN

- *Wer bekommt mehr Tore?*
- *Reichen die Bälle, wenn noch zwei Kinder dazukommen?*
- *Wie viele Kissen muss ich für den Morgenkreis holen, wenn jedes Kind eins bekommen soll?*
- *Wie weit lässt sich zählen? Was ist die größte und was die kleinste Zahl, die es gibt?*



Neben den Impulsfragen ist zur jeweiligen Phase immer ein Ziel formuliert. So ist beispielsweise das Ziel der zweiten Phase, dass sich die Kinder auf gemeinsame Bezeichnungen geeinigt haben. Alle Beteiligten wissen dann, wovon die Rede ist, wenn bestimmte Wörter genutzt werden. Gehen Sie dabei auf die Formulierungen der Mädchen und Jungen ein, hinter denen sich oft interessante Vorstellungen verbergen, und knüpfen Sie daran an.

Meist lassen sich dahinter interessante Vorstellungen entdecken. Knüpfen Sie daran an. Sie können an dieser Stelle eine dem Alter angemessene (Fach-)Sprache einbringen, so dass sich anhand konkreter Beispiele Begriffe bei den Kindern bilden. Der Mathematikkreis zielt auf das Erkennen von Regelmäßigkeiten und Zusammenhängen (Muster und Strukturen) ab. In den folgenden Phasen „Beispiele ausprobieren, Muster erkennen, Muster prüfen und nutzen sowie Ergebnisse erörtern“ werden die Kinder dabei begleitet, zu solchen Mustern zu gelangen und sie zum Argumentieren zu nutzen.

Der Mathematikkreis lässt sich nicht nur beim Beobachten der Mädchen und Jungen oder beim Planen von Angeboten einsetzen, er kann Ihnen auch zur Reflexion des eigenen Vorgehens dienen. Im Praxisteil dieser Broschüre finden Sie vielfältige Anregungen und Beispiele, wie nach der Methode des Mathematikkreises vorgegangen werden kann.

DAS EIS-PRINZIP: MATHEMATIK KONKRET BIS ABSTRAKT¹⁹

Das Wissen entwickelt sich nach Bruner auf verschiedenen Repräsentationsebenen:



Der Mathematikkreis ermöglicht eine Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen auf allen drei Ebenen. Die Kinder können ihre Fragen mit Material untersuchen, bildliche Darstellungen nutzen oder mit abstrakten Zeichen arbeiten.

PROZESSBEZOGENE MATHEMATISCHE KOMPETENZEN

Problemlösen (entdecken, forschen, erfinden)

... ist die Fähigkeit, Probleme und Fragestellungen mathematisch zu lösen und dabei zunehmend strukturiert und planvoll vorzugehen.

Argumentieren (vermuten und begründen)

... ist die Fähigkeit, mathematische Zusammenhänge zu erkennen und Vermutungen zu äußern, sie begründen zu können sowie Aussagen auf ihre Korrektheit zu hinterfragen.

Kommunizieren (Lösungswege erklären und aufschreiben)

... ist die Fähigkeit, die eigene Vorgehensweise zu beschreiben, andere Lösungswege zu verstehen und darüber zu sprechen. Weiterhin gehört die Kompetenz dazu, mathematische Begriffe und Zeichen sachgerecht zu verwenden.

Darstellen (Ergebnisse darstellen)

... ist die Fähigkeit, eine für das mathematische Problem geeignete Darstellungsform zu finden und von einer Darstellung in eine andere zu übertragen. Sie hängt eng mit der Kommunikationsfähigkeit zusammen. Darstellungen sind eine Form der Kommunikation mit anderen. Es ist eine wichtige Kompetenz, eine Darstellungsform so zu wählen, dass sie von anderen verstanden wird.

Modellieren (die Welt durch eine Mathe-Brille sehen)

... ist die Fähigkeit, Sachtexten oder Situationen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen zu entnehmen, diese in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, innermathematisch zu lösen und die Lösung wieder auf die Ausgangssituation zu beziehen.





WO IST DAS
VIERBLÄTTRIGE
KLEEBLATT ?

ANREGUNGEN FÜR DIE PÄDAGOGISCHE PRAXIS

ZAHLEN SIND ÜBERALL!

Im nachfolgenden Kapitel finden Sie viele Praxisideen, wie Sie gemeinsam mit den Mädchen und Jungen die Welt der Zahlen, des Zählens und des Rechnens erforschen können. Diese gliedern sich in die drei thematischen Abschnitte „Wer hat Lust, zu spielen?“, „Ein Blick über den Tellerrand“ und „Zahlenmuster“.

Öffnen Sie sich für mathematische Situationen, und erfahren Sie, warum sich die Kinder beispielsweise im freien Spiel mit Legosteinen ganz automatisch mit Mathematik beschäftigen. Oder machen Sie gemeinsam mit den Mädchen und Jungen eine Forschungsreise in andere Länder bzw. Zeiten, und gehen Sie dabei der Frage nach, ob man eigentlich überall so zählt wie bei uns.

Zu jedem Thema gibt es eine Übersicht über mögliche Inhalte und vielfältige Anregungen für Ihre pädagogische Praxis. Diese Praxisideen können Ausgangspunkte für das mathematische Forschen der Kinder bilden und eignen sich dazu, sie gemeinsam nach der Vorgehensweise des Mathematikkreises zu erforschen. Dies wird in jedem Praxisteil an jeweils einem Beispiel als ein möglicher Verlauf aufgezeigt und kann auf die anderen Praxisideen in der Übersicht entsprechend übertragen werden.

An manchen Praxisideen finden Sie immer wieder Hinweise, wenn sich inhaltliche Verknüpfungen zum Karten-Set „Zahlen, Zählen, Rechnen – Mathematik entdecken“ für pädagogische Fach- und Lehrkräfte oder zu den Entdeckungskarten für Kinder ergeben. Nutzen Sie gern auch die dort dargestellten Anregungen und Ideen.

*Zugehörige
Karten-Sets*



WER HAT LUST ZU SPIELEN?

Zu Hause, im Freispiel oder im Hort spielen die Kinder mit Karten und Brettspielen. Sie spielen Rollen- und Ballspiele, sie spielen mit Bausteinen oder im Sandkasten, machen Rennen am Hügel, Spielen am Klettergerüst etc. Spielen hat für sie keinen pädagogischen oder therapeutischen Zweck – es macht einfach Spaß.

In der Spieltheorie wird vom zweckfreien Spiel gesprochen, wenn das Spielen unmittelbar aus dem Spieltrieb, einer Lust am Spielen, entsteht.²⁰ Wollen mehrere zusammenspielen, funktioniert das Spielen allerdings nur, wenn sich alle an bestimmte Regeln halten. So muss vor dem Spiel geklärt werden, wie gespielt wird. In den meisten Fällen enthalten Gesellschaftsspiele Spielanleitungen, in denen genau beschrieben ist, wie das Spiel gespielt werden soll. Einige Mädchen und Jungen kennen auch Spiele, die ihnen zu Hause von ihren Eltern und Geschwistern beigebracht worden sind. Alle beherrschen ganz einfache Spiele, wie Verstecken oder Fangen.

Für die meisten Spiele, z. B. beim Würfeln, Zählen und Setzen, braucht man mathematische Fähigkeiten. Es wird ständig gezählt und gerechnet, ganz nebenbei, ohne dass es den Kindern auffällt. Spielen die Mädchen und Jungen, können sich verschiedene Forschungsanlässe ergeben, wie die folgenden Ideen für mathematische Forschungsprojekte zum Thema „Spiele“ zeigen.

WAS DIE FINGER ALLES KÖNNEN – KINDER ERFORSCHEN DAS ZÄHLEN MIT FINGERN

Fingerspiele – gereimte und gesungene Verse, die von Bewegungen der Hände begleitet werden – regen die Mädchen und Jungen zu Aufmerksamkeit, Mitmachen und Mitsingen an. Die kurzen Geschichten vom Pflaumenpflücken oder von kleinen Zwergen können oft schon die ganz Jungen mitsprechen. Die eigenen zehn Finger hat jedes Kind immer dabei. Sie sind ein Teil des eigenen Körpers, den man spüren und sehen kann. Das macht sie so praktisch, z. B. auch zum Zählen und Rechnen. Dabei lassen sich die Finger nicht nur zum Alles- und Weiterzählen, sondern auch für die Vorstellung von Zahlen, die Zahlzerlegung, die Addition, als Gedächtnisstütze, für das Einmaleins und vieles mehr einsetzen.²¹

Die folgenden Anregungen zeigen, wie Sie die Mädchen und Jungen dabei begleiten können, bereits bekannte Strategien, bei denen sie ihre Finger verwenden, zu erforschen und neue Tricks und Kniffe kennen zu lernen. Zuerst zeigt eine Übersicht verschiedene Vorschläge zu Fingerspielen auf. Folgend finden Sie ein Beispiel einer mathematischen Frage der Kinder, das mit dem Mathematikreis begleitet wird.

Fingerblitz:

Die Kinder spielen zu zweit. Sie stehen sich gegenüber. Ein Kind zeigt mit den Fingern eine Zahl von eins bis zehn, das andere nennt die Zahl, so schnell es kann. Sind die Mädchen und Jungen in diesem Spiel geübt oder verfügen über gute Fähigkeiten in der Anzahlbestimmung, erkennen z. B. Mengen schon mit einem Blick, können sie das Spiel auch variieren.



²⁰ Vgl. Einsiedler, W. (1999), S. 17

²¹ Vgl. Grassmann, M. (1997), S. 25–29



**Für die „Zehn kleinen Zappelmänner“
z. B. braucht man beide Hände und
bewegt sie entsprechend der Verse mit:**

*Zehn kleine Zappelmänner
zappeln hin und her,
zehn kleinen Zappelmännern
fällt das gar nicht schwer.*

*Zehn kleine Zappelmänner
zappeln auf und nieder,
zehn kleine Zappelmänner
tun das immer wieder.*

*Zehn kleine Zappelmänner
zappeln rings herum,
zehn kleine Zappelmänner
fallen plötzlich um.*

*Zehn kleine Zappelmänner
kriechen ins Versteck,
zehn kleine Zappelmänner
sind auf einmal weg.*

*Zehn kleine Zappelmänner
sind nun wieder da,
zehn kleine Zappelmänner
rufen laut:*



Gleiches gewinnt:

*Die beiden Kinder zeigen gleichzeitig eine Zahl zwischen
eins und fünf mit den Fingern. Stimmen die beiden Zahlen
überein, bekommen sie einen Punkt.*

*Etwas schwieriger wird es, wenn die Mädchen und Jungen
eine Zahl zeigen und gleichzeitig eine andere Zahl nennen.
Zeigt ein Kind diejenige Zahl, die das andere nennt,
gibt es einen Punkt.*

EIN MÖGLICHER VERLAUF: „ZAHLEN, ZÄHLEN, RECHNEN“ MIT DEN FINGERN ERFORSCHEN



Zählen Sie gemeinsam die Kinder, die heute da sind. Die Mädchen und Jungen benutzen dabei möglicherweise ihre Finger. Fragen Sie die Kinder, wie sie das eigentlich machen. Wie verwenden sie ihre Finger? Benutzen alle Mädchen und Jungen die Finger gleich oder gibt es Unterschiede? Vielleicht klappen z. B. einige für jeden Gegenstand, den sie gezählt haben, immer einen Finger beginnend mit dem Daumen hoch. Andere tippen die Finger einer Hand nacheinander an oder klopfen beim Zählen bei jedem Gegenstand mit dem Finger auf den Tisch bzw. auf ihren Arm. Zeigen Sie den Mädchen und Jungen eine andere Art, mit den Fingern zu zählen, z. B.: 2, 4, 6, 8, 10 ... Es gibt also verschiedene Möglichkeiten, die Finger zum Zählen zu nutzen. Eine mathematische Forschungsfrage entsteht: Wie (weit) kann man mit zehn Fingern zählen?



Überlegen Sie gemeinsam, warum man eigentlich zählt und wie das funktioniert. Wo beginnt man zu zählen und wann hört man auf? Betrachten Sie dann zusammen die Hände und die Finger. Wie sehen sie aus? Was ist bei allen Händen gleich und was verschieden? Jedes Kind umrandet nun mit einem Stift seine beiden Hände auf einem Blatt Papier. Fertigen auch Sie zwei große Hände auf Papier an. Zählen Sie gemeinsam die Finger einer Hand und dann die der anderen, danach die Finger beider Hände zusammen. Fragen Sie die Mädchen und Jungen, ob sie Ideen haben, wie man untersuchen könnte, wie weit man mit den zehn Fingern zählen könnte?



Die Kinder zählen nun verschiedene Gegenstände im Raum. Wie viele Bälle sind im Korb? Wie viele Bausteine sind im Karton? Wie viele Puppen stehen im Regal? Dazu benutzen sie ihre Finger. Achten Sie bei Mädchen und Jungen mit wenig Erfahrung im Zählen darauf, dass nicht mehr als zehn Gegenstände bereitliegen. Kinder, die die Zahlwortreihe und das Zählen schon beherrschen, können auch größere Mengen zählen. Regen Sie die Mädchen und Jungen an, die Fingerspiele „Fingerblitz“ und „Gleiches gewinnt“ zu spielen (siehe Übersicht).



Sprechen Sie mit den Kindern darüber, wie sie die Spiele erlebt haben. Wie sind die Spiele abgelaufen und was hat den Mädchen und Jungen geholfen? Können sie an ihrer Papierhand zeigen, wie sie gezählt oder eine Zahl gezeigt haben? Was hat ihnen dabei geholfen? Vielleicht haben einige Kinder die Finger auch als Merkhilfe genutzt. Bestimmt haben viele Mädchen und Jungen die Fünferstruktur der Hände eingesetzt. Gemeinsam können Sie die Zahlen von eins bis zehn als Punktebilder – oder erfahrene Kinder als Ziffern – an den entsprechenden Fingern eintragen. Bestücken auch Sie Ihre beiden großen gebastelten Papierhände mit den Zahlen von eins bis zehn.



Die Kinder nutzen nun ihre Hände und die Finger zum Drucken. Sie bestreichen ihre Hände mit Fingermalfarbe und drucken sie auf Papier. Aus den Händen lassen sich auch Tiere oder viele andere verschiedene Gegenstände gestalten. Die Mädchen und Jungen überlegen sich zuerst, was sie drucken wollen. Wie viele Beine hat z. B. ein Oktopus? Wie könnte der Oktopus mit ganzen Händen oder einzelnen Fingern gedruckt werden?



Mathematisch erfahrene Kinder erhalten eine Zählaufgabe mit den Fingern, die es in sich hat. „Wir zählen an den Fingern einer Hand: Daumen 1, Zeigefinger 2, Mittelfinger 3, Ringfinger 4, kleiner Finger 5 und nun rückwärts weiter: Ringfinger 6, Mittelfinger 7 ... Für welchen Finger ergibt sich die Zahl 2016?“²²

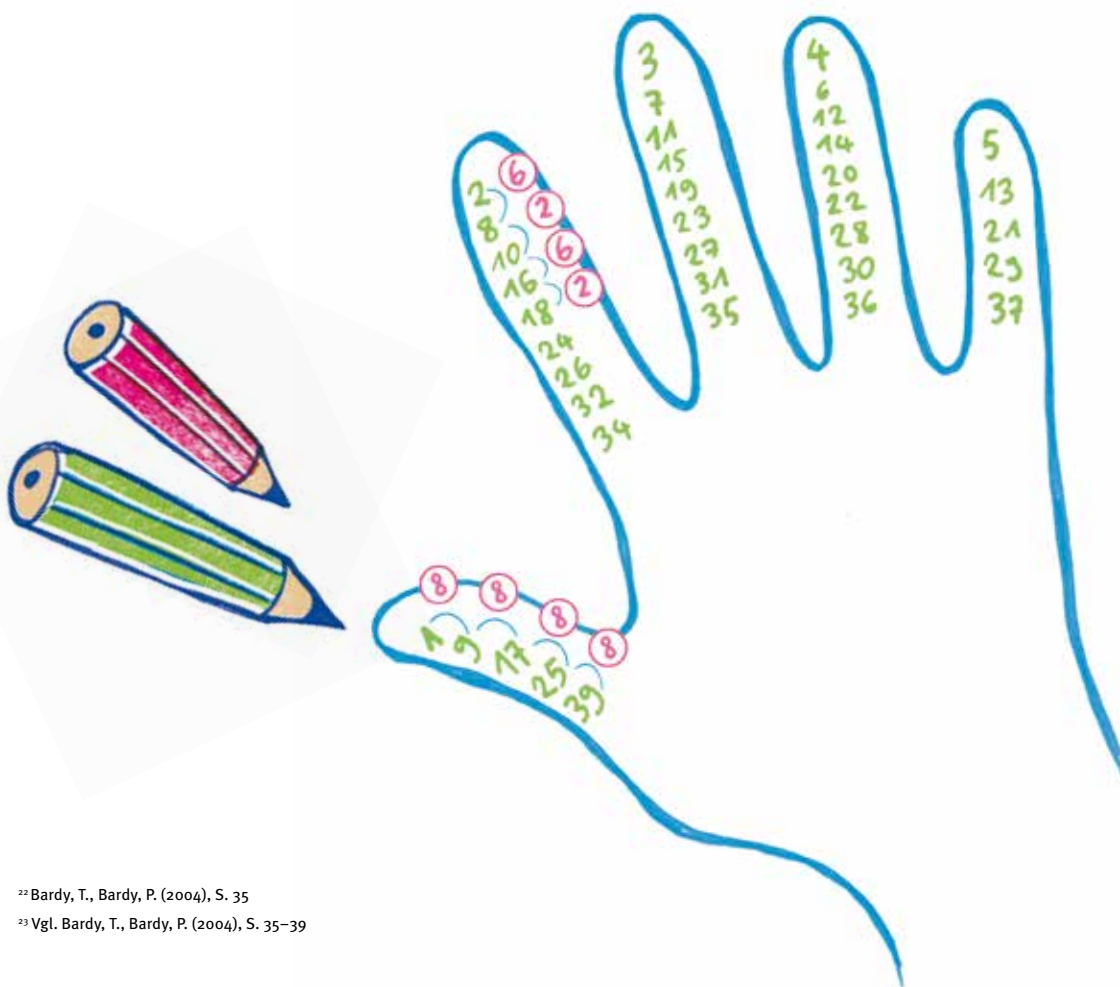


Bardy und Bardy beschreiben, wie Kinder der vierten Klasse Muster und Strukturen bei der Lösung dieser Aufgabe entdecken. Dabei reichen die Entdeckungen der Mädchen und Jungen von der Nutzung einfacher Tabellen über Skizzen mit Fingern, verbale Darstellungen von umfänglichen Zählprozessen, der Entdeckung der Achterreihe beim Zeigefinger, der Beachtung des Wechsels von geraden und ungeraden Zahlen und des Zahlenwechsels an Daumen und kleinem Finger bis hin zur Entwicklung einer allgemeinen Formel für Daumenzahlen.²³

Mehr Wissen



Nun werden alle Hände bzw. Handkunstwerke der Gruppe gezeigt. In einer kleinen Ausstellung der Hände, z. B. an einer Wäscheleine oder einer Pinnwand im Raum, können die anderen Mädchen und Jungen die Ergebnisse bestaunen. Die Frage „Wie zählst du?“ als Überschrift der Ausstellung regt die Besucherinnen und Besucher dazu an, selbst über das Zählen mit den Fingern nachzudenken.



²² Bardy, T., Bardy, P. (2004), S. 35

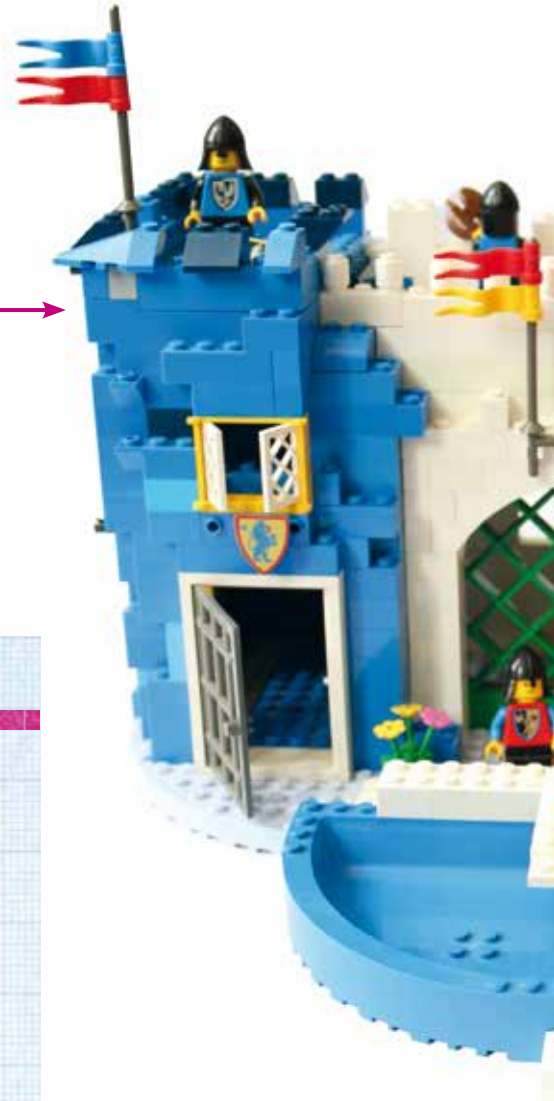
²³ Vgl. Bardy, T., Bardy, P. (2004), S. 35–39

WIE BAUE ICH SCHLAU? KINDER FORSCHEN MIT STECKBAUSTEINEN

Aufeinandersteckbare Bausteine bieten den Mädchen und Jungen den Freiraum, alles zu bauen, was sie wollen. Sie können aus den Grundsteinen verschiedenste Figuren, Gebäude oder sogar ganze Landschaften erschaffen. Der Kreativität der Kinder sind keine Grenzen gesetzt. Beim Bauen mit Bausteinen können die Mädchen und Jungen unterschiedliche Aspekte berücksichtigen: die Farbe und Länge der Steine, die Reihen und die Noppen auf den Steinen. Es ergeben sich vielfältige mathematische Forschungsanlässe.

Die folgende Übersicht zeigt an verschiedenen Stellen auf, welche mathematischen Lerngelegenheiten zu Zahlen, zum Zählen und zum Rechnen unterschiedliche Bausituationen enthalten. Alle diese Bausituationen können ein Ausgangspunkt für mathematische Fragen der Kinder sein. Einen möglichen Verlauf des Nachgehens einer solchen Frage unter Berücksichtigung des Mathematikkreises finden Sie im Anschluss an die Übersicht.

Welche Steine gibt es?



Wie sieht mein Schloss aus?

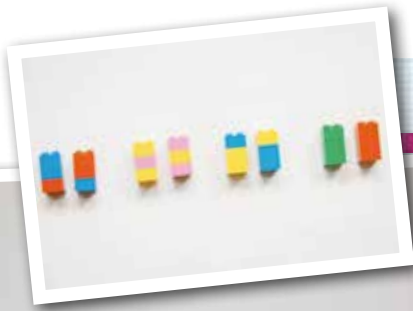
Mehr Wissen



Die Mädchen und Jungen können ihr Bauvorhaben mit Hilfe einer Zeichnung planen. Im Laufe des Forschens werden die Kinder womöglich Entdeckungen machen, die für das Bauen wichtig sind, wie z. B. die Anzahl der Noppen und Reihen in einer Mauer.



Forschen Sie hier weiter mit der Entdeckungskarte „Vom Gegenstand zum Symbol“ aus dem Karten-Set „Mathematik in Raum und Form entdecken“.



Wie baue ich einen Turm?

Mit der Höhe von Türmen kann die kindliche Mengenvorstellung von Zahlen visuell unterstützt werden (Wie hoch ist der Zweierturm, wie hoch der Vierer?). So können Türme beispielsweise dazu verwendet werden, die Ergebnisse von Rechenoperationen zu visualisieren.

Mehr Wissen



Weitere Anregungen für erfahrenere Kinder finden Sie auf der Entdeckungskarte für Kinder „Gerade oder ungerade?“.



Wie baue ich eine 4 · 4-Fläche?



Wie baue ich eine Wand?

Mit dem Bau einer Wand erfahren die Mädchen und Jungen spielerisch, was die Zerlegung von einem Ganzen in Einzelteile bedeutet. Jede Reihe hat insgesamt die gleiche Anzahl von Noppen, wie viele Noppen können die Steine haben, die zusammen eine komplette Reihe ergeben?

Mehr Wissen



Forschen Sie weiter mit der Entdeckungskarte „Geschmackssache“. Erfahrenere Kinder können zudem die Entdeckungskarte für Kinder „Gerüttelt und geschüttelt“ nutzen.



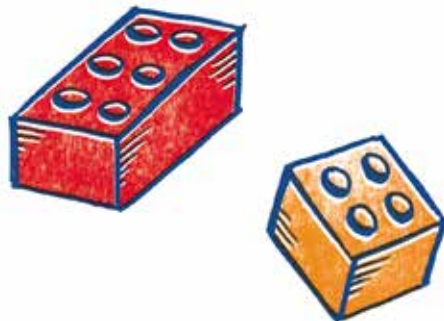
EIN MÖGLICHER VERLAUF: BEIM BAUEN MUSTER ERFORSCHEN UND ERFINDEN



Ausgehend vom freien Bauen mit Steckbausteinen kommt es vielleicht zu der Situation, in der ein Kind etwas Tolles geschaffen hat. Wie hast du das gebaut? So etwas will ich auch machen! Die Mädchen und Jungen zeigen sich ihre Gebäude, erzählen etwas dazu und vergleichen sie miteinander. Daraus entwickelt sich möglicherweise die Idee, etwas gemeinsam zu bauen: Wie wäre es z. B. mit einem Schloss (Gespensterhaus, Bahnhof ...)?



Besprechen Sie mit den Kindern, was alles zu einem Schloss gehört (Wände, Türme, Mauern ...). Wie viele Wände soll das Schloss haben, wie viele Türme? Wer möchte gern eine Wand bauen, wer einen Turm? Überlegen Sie gemeinsam, wie man dabei geschickt vorgehen kann: Wie passt am Ende alles gut zusammen? Bauen Sie eine Wand miteinander und diskutieren Sie mit den Kindern: Wie wird eine zweite Wand gleich hoch und gleich breit? Zählen Sie dazu gemeinsam, wie viele Reihen die Wand hat und wie viele Noppen in der obersten Reihe zu sehen sind. Betrachten Sie zusammen die Steckbausteine: Wie sehen sie aus? Was ist bei allen Steinen gleich und was verschieden?



Jedes Kind darf sich nun zwei Hände voll Steckbausteine nehmen, um daraus eine Wand zu bauen. Wie sehen die Reihen der Mädchen und Jungen aus? Verwenden die Kinder z. B. nur eine Farbe für jede Reihe oder bauen sie eine Reihe mit besonders vielen und eine andere mit besonders wenigen Steinen? Regen Sie die Mädchen und Jungen dazu an, ihre Steine bei Bedarf auch untereinander zu tauschen. Haben sie nämlich bereits einige Reihen gebaut und somit weniger Steine zur Verfügung, kann es vorkommen, dass ihnen am Ende der Reihe ein passender Stein zum Schließen der Lücke fehlt.



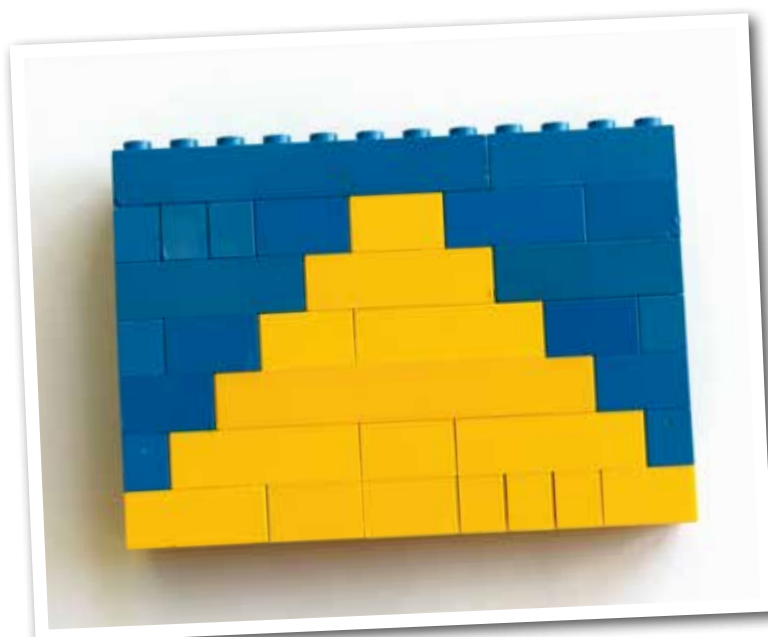
Haben die anderen Kinder vielleicht einen Stein, der in ihre Lücke passt? Nicht immer finden sie einen großen Stein, der genau passt. Aber vielleicht gibt es mehrere kürzere Steine, die zusammen die Lücke füllen? Die Mädchen und Jungen entdecken ganz automatisch, dass sie z. B. für eine vier Noppen lange Lücke statt einem Viererstein auch zwei Zweiersteine oder einen Einer- und einen Dreierstein verbauen können – die Farbe spielt hier keine Rolle. Machen Sie die Kinder, wenn nötig, darauf aufmerksam, dass die Anzahl der Noppen ihnen bei der Auswahl helfen kann, und zählen Sie diese gemeinsam.



Nach dem gleichen Prinzip können die Mädchen und Jungen vorgehen, wenn ihre Lücke eine beliebige andere Länge besitzt – statt einem großen Stein können sie stets mehrere kleine Steine kombinieren, die zusammen die gewünschte Länge ergeben.



Schauen Sie sich die fertigen Wände der Kinder am Ende gemeinsam an: Wer hat die breiteste, wer die schmalste Wand gebaut? In welcher Wand gibt es die Reihe mit den meisten, in welcher die mit den wenigsten Steinen? Sind die Wände nach einem bestimmten Muster gebaut? Vielleicht haben andere Mädchen oder Jungen in der Zwischenzeit Türme oder Mauern gesteckt: Passen die Einzelteile gut zusammen? Wie sieht das Schloss am Ende aus – sind die Kinder zufrieden? Was wollen sie das nächste Mal bauen?



ICH HABE
EIN DREIECK
GEBAUT!



WIE GEHT (M)EIN PERFEKTES SPIEL? KINDER ERFORSCHEN UND ERFINDEN SPIELE

Die Mädchen und Jungen spielen ein Gesellschaftsspiel. Einige Kinder ärgern sich über bestimmte Regeln, wollen sich vielleicht nicht daran halten oder kennen das Spiel von zu Hause anders. Zwischen den Mädchen und Jungen entsteht eine Diskussion, wie das Spiel eigentlich geht. Wer ist an der Reihe? Wie viele Schritte darf ich vor? Wann muss ausgesetzt werden? Wer hat wann gewonnen? Wann ist das Spiel zu Ende?

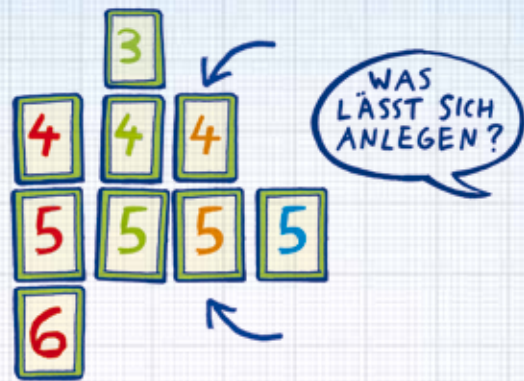
Die folgende Übersicht zeigt drei verschiedene Spielideen, die vielfältige mathematische Lernerfahrungen ermöglichen. Außerdem weist sie verschiedene Optionen auf, wie Spiele variiert werden können, wie Sie Spiele genau auf die Bedürfnisse der Kinder in Ihrer Einrichtung anpassen können. Beobachten Sie die Mädchen und Jungen beim Spielen und greifen Sie eine oder zwei der Möglichkeiten und Anregungen aus der Übersicht oder die eigenen Veränderungsideen der Kinder auf. Dazu liefert Ihnen ein möglicher Verlauf einer Lernbegleitung mit dem Mathematikreis Anregungen.

Mehr Wissen



Mathematische Lernerfahrungen:

Bei diesen Spielen ordnen die Kinder Zahlen. Sie bestimmen Nachbarzahlen und werden so in ihrem Verständnis der Zahlreihenbildung gefördert.



EINE KLEINE SPIELESAMMLUNG

Mehr Wissen



Mathematische Lernerfahrungen:

Spielen die Kinder dieses Spiel, entwickeln sie ihre Fähigkeiten im Erfassen und Bestimmen von Anzahlen weiter. Es geht hier um die Schnelligkeit der Anzahlbestimmung. Je nach Kompetenzen der Kinder werden die Gegenstände dabei ausgezählt, oder die Mädchen und Jungen sind schon in der Lage, sie auf einen Blick zu erfassen. Zusätzlich werden im Spiel noch Mengen verglichen.

Dieses Kartenspiel finden Sie in der Mitte der Broschüre.





Mathematische Lernerfahrungen:

Bei diesen Spielen rechnen die Kinder. Sie müssen logisch schlussfolgern und beschäftigen sich mit dem Einmaleins.

In der Mitte liegen z. B. 13 Steine. Die Kinder dürfen nacheinander einen, zwei oder drei Steine wegnehmen. Wer als Letzte bzw. Letzter noch Steine nehmen kann, hat gewonnen.

Mehr Wissen



SPIELE VARIIEREN – SPIELE ERFINDEN: WAS LÄSST SICH AN EINEM SPIEL VERÄNDERN?

SPIELREGELN

Wer beginnt? Was passiert bei einem Zug?
Was geschieht nach einer Runde? Wie endet
das Spiel? Muss ich das Ziel genau treffen oder
nur durchlaufen?



MATERIALIEN

Welche Repräsentationsformen z. B. (handelnd mit oder ohne Figuren,
bildlich, abstrakt) ermöglicht das Spiel? Lässt sich dies erweitern? Vielleicht
sogar ein Wechsel zwischen verschiedenen einrichten? Würfeln, zählen,
malen, bewegen, Anzahl an Schritten setzen ...
Lassen sich Materialien durch andere ersetzen? Lassen sich auch Alltags-
materialien nutzen: Bohnen, Steine, Magnete, Holztafeln etc.?



INHALTE

Lassen sich Zahlenräume, Schrittmöglichkeiten, erlaubte Züge, Würfel oder
Karten variieren? Lassen sich Spielinhalte anders darstellen (Gegenstände,
Punktbild, Zahlen)? Lassen sich Spiele oder Teile davon mit eigenen Ideen zu
einem noch besseren Spiel kombinieren?



EIN MÖGLICHER VERLAUF: SPIELE SPIELEN, VERÄNDERN, ERFINDEN



Besprechen Sie mit den Kindern, wer eigentlich welche Spielregeln für das Spiel kennt, das die Mädchen und Jungen gerade spielen. Regen Sie die Kinder dazu an, in der nächsten Runde eine andere Variante auszuprobieren, beim Spiel also eine Regel zu verändern, z. B. „Mensch ärgere Dich nicht“ mit zwei Würfeln zu spielen und die Augenzahlen zuerst zu addieren und später zu multiplizieren. Besprechen Sie mit den Mädchen und Jungen, welche Wirkung die Veränderung der Spielregel auf den Spielverlauf hatte. Wann hat das Spiel mehr Spaß gemacht? Gemeinsam gelangen Sie zu der Frage: Wie sieht eigentlich ein Spiel aus, das allen richtig viel Spaß macht? Welche Bestandteile und Spielregeln hat ein solches Spiel?



Sammeln Sie mit den Kindern Spiele, die sie kennen. Welche Spiele fallen den Mädchen und Jungen ein? Welche kennen sie aus der Kita, der Schule oder von zu Hause? Wie funktionieren die Spiele? Wie viele Spielerinnen und Spieler werden benötigt, welche Materialien gebraucht und wie laufen die Spiele ab? Was haben die Spiele gemeinsam, die ihnen besonders viel Spaß machen? Halten Sie die Antworten der Kinder fest. Planen Sie nun mit den Mädchen und Jungen das weitere Vorgehen. Wollen die Kinder die gesammelten Spiele testen und das beste ermitteln oder vielleicht sogar ein eigenes Spiel erfinden, das ihnen viel Spaß bringen wird?



Die Mädchen und Jungen probieren einige Spiele aus. Sie testen die Spiele, die ihnen am besten gefallen. Nun können die Kinder überlegen, wie man das Spiel vielleicht auch anders spielen könnte, und eine weitere Spielvariante ausprobieren. Die Mädchen und Jungen sammeln Informationen über die Spiele und jeweiligen Spielregeln. So haben sie später die Möglichkeit, sich an die einzelnen Spiele zu erinnern.



Die Kinder vergleichen die gespielten Spiele nun miteinander. Wie viele Spielerinnen und Spieler können mitspielen? Wie lange dauert das Spiel? Was wurde alles an Materialien benötigt? Muss man manchmal lange warten? Die Mädchen und Jungen können die Merkmale der Spiele oder der Spielregeln auch bewerten. Halten Sie anschließend gemeinsam fest, was für die Kinder alles zu einem guten bzw. zum idealen Spiel gehört.



Die Mädchen und Jungen haben nun die Möglichkeit, ihre Ergebnisse umzusetzen, indem sie entweder ein Spiel verändern, so dass es mehr nach ihren Vorstellungen eines idealen Spiels gespielt werden kann, oder sie erfinden ein neues, ganz eigenes Spiel, in dem alle oder einige ihrer aufgestellten Merkmale berücksichtigt werden. Wie soll das Spiel funktionieren? Wie fängt man an? Was passiert bei einem Zug? Wann ist das Spiel zu Ende? Die Kinder spielen ihr variiertes oder erfundenes Spiel. Sie prüfen, ob es klappt und ihre Ideen das Spiel tatsächlich verbessert haben bzw. das Spiel nach ihren Vorstellungen läuft. Die Mädchen und Jungen dokumentieren ihre Ergebnisse, indem sie eine Spielanleitung erstellen. Sie zeichnen oder schreiben auf, wie das Spiel funktioniert und was man zum Spielen alles braucht.



Sind die Kinder mit ihrem Spiel zufrieden, lassen sie es auch andere Mädchen und Jungen ausprobieren. Verstehen die anderen die Spielregeln? Wie lässt sich die Spielanleitung verbessern, damit sie verständlicher wird? Spielen die anderen das Spiel genauso, wie die anderen "Erfinderinnen und Erfinder" es sich vorgestellt haben, oder verändern sie etwas? Macht es den anderen Mädchen und Jungen Spaß? Fanden die anderen Kinder das Spiel zu einfach oder zu schwer? Wie könnte man das Spiel verändern, damit es einfacher oder schwerer wird? Vielleicht ergeben sich nun weitere Variations- oder noch einmal ganz neue Spielideen.



Weitere Spiel- und Spielvariationsideen finden Sie auf der Entdeckungskarte "Beim Spielen die Null entdecken"

EIN BLICK ÜBER DEN TELLERRAND

Schauen wir in andere Welten, lernen wir viel Neues und Interessantes kennen. Unbekanntes zu erleben hilft uns dabei, die eigene Welt besser zu begreifen. Deshalb lohnt sich der Blick über den Tellerrand. Die folgenden Anregungen liefern Ihnen Beispiele, wie Sie mit den Kindern das Eintauchen in andere Länder, in die Vergangenheit oder die Zukunft als Forschungsanlässe nutzen können, um die Welt der Zahlen genauer zu untersuchen und zu verstehen.

WIE ZÄHLT UND RECHNET MAN WOANDERS?

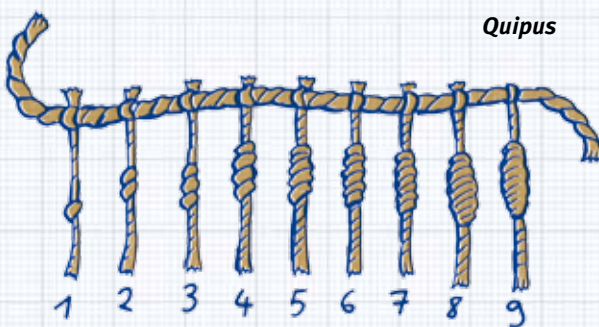
Auf einem Ausflug stoßen die Mädchen und Jungen auf alte Gebäude und Gemäuer. Den Kindern begegnen dabei lateinische Inschriften. Was bedeuten diese schönen goldenen Zeichen? Oft handelt es sich dabei um Entstehungsdaten der Bauwerke oder wichtige historische Daten für Geschehnisse in der Vergangenheit. Die Zahlen sehen jedoch ganz anders aus, als jene, die die Mädchen und Jungen schon kennen. „Wie zählt und rechnet man eigentlich woanders?“ ist eine mögliche Frage, die sich daraus entwickelt. In der nachfolgenden Übersicht bekommen Sie Anregungen, in welche Teile der Erde Sie eine solche Frage führen kann. Am Beispiel der Inka wird eine gemeinsame Forschungsreise entlang des Mathematikkreises erläutert.

Mehr Wissen



Im Reich der Inka

Ihre Knotenschnüre haben die Inka an eine dickere Hauptschnur geknotet und damit eine riesige Datenbank geschaffen („Quipus“). Jede Schnur stand für etwas anderes, z. B. für die Anzahl der Schafe oder für den Maisertrag.



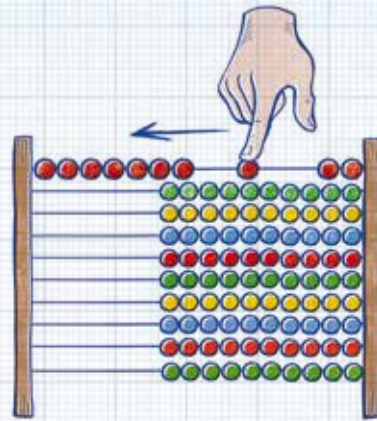
Ein Knoten im Taschentuch



Bei uns

In Europa haben wir eine ganz einfache Zählhilfe: den Abakus. Jede Kugel hat den Wert „1“. Besonders beim Rechnen über die 10 hinaus kann uns der Abakus helfen.

DU HAST 7,
ICH HAB 5...
WIE VIELE HABEN
WIR ZUSAMMEN?

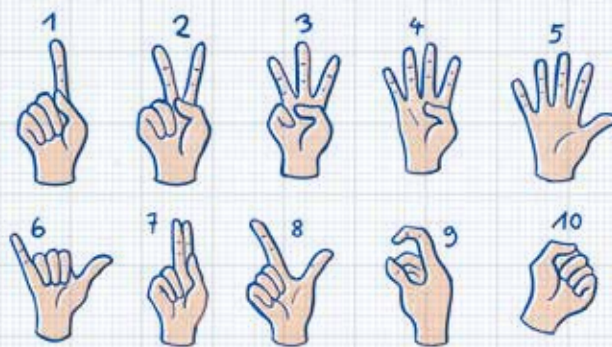


Mehr Wissen



In China

In China ist es üblich, eine Zahl mit den Händen zu zeigen. Chinesen kommen mit nur einer Hand bis zur Zahl 10.²⁵

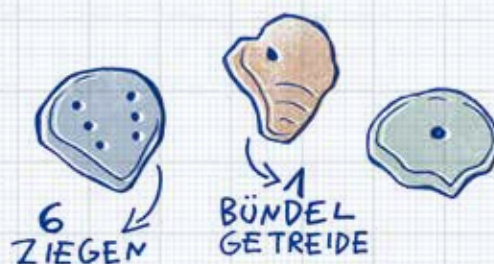


Mehr Wissen



Im heutigen Südirak

Jeder Zählstein hatte einen bestimmten Zahlenwert und symbolisierte etwas anderes, z. B. eine Ziege oder ein Bündel Getreide. Die Steine wurden in hohle Tonkugeln eingeschlossen, damit keine Information verloren ging.



Mehr Wissen



²⁵Video zum Zählen auf Chinesisch: <https://www.youtube.com/watch?v=IXpGKHSyUc> (Stand vom 17.03.2016)

EIN MÖGLICHER VERLAUF: ZÄHLEN WIE DIE INKA



Was wissen die Mädchen und Jungen bereits über Knoten? Wann und wobei haben sie das letzte Mal etwas geknotet? Kann eines der Kinder auch einen besonderen Knoten, wie z. B. einen Seemannsknoten, machen und mag ihn der Gruppe zeigen? Gelingt dieser Knoten den anderen Mädchen und Jungen auch? Besprechen Sie mit den Kindern, dass Knoten uns das Leben erleichtern. Wir benutzen sie beispielsweise, um Schuhe zuzubinden oder Luftballons zu verschließen. Haben die Mädchen und Jungen auch eine Idee, wie sie Knoten zum Zählen nutzen können?



Teilen Sie an alle Kinder lange Wollfäden aus, und überlegen Sie gemeinsam, wie so eine Knotenzahl aussehen könnte. Welche Ideen haben die Mädchen und Jungen? Wie wäre es, für jede „1“ einen Knoten zu machen – so wie die Inka in Südamerika vor etwa 1.000 Jahren? Lassen Sie die Kinder nun z. B. ihr Alter knoten. Im Anschluss lohnt ein Blick auf die unterschiedlichen Knoten: Sind sie locker oder fest zugezogen? Sehen alle Knoten gleich aus?



Machen Sie es wie die Inka und bauen Sie gemeinsam mit den Mädchen und Jungen eigene Knoten-Datenbanken. Was ist den Kindern wichtig? Eine Schnur kann beispielsweise dafür stehen, wie viele Geschwister sie haben, eine andere dafür, an welchem Tag ihr Geburtstag ist. Haben die Mädchen und Jungen auch eine Lieblingszahl? Teilen Sie erneut bunte Wollfäden und Kordeln für die verschiedenen Knotenschnüre aus.

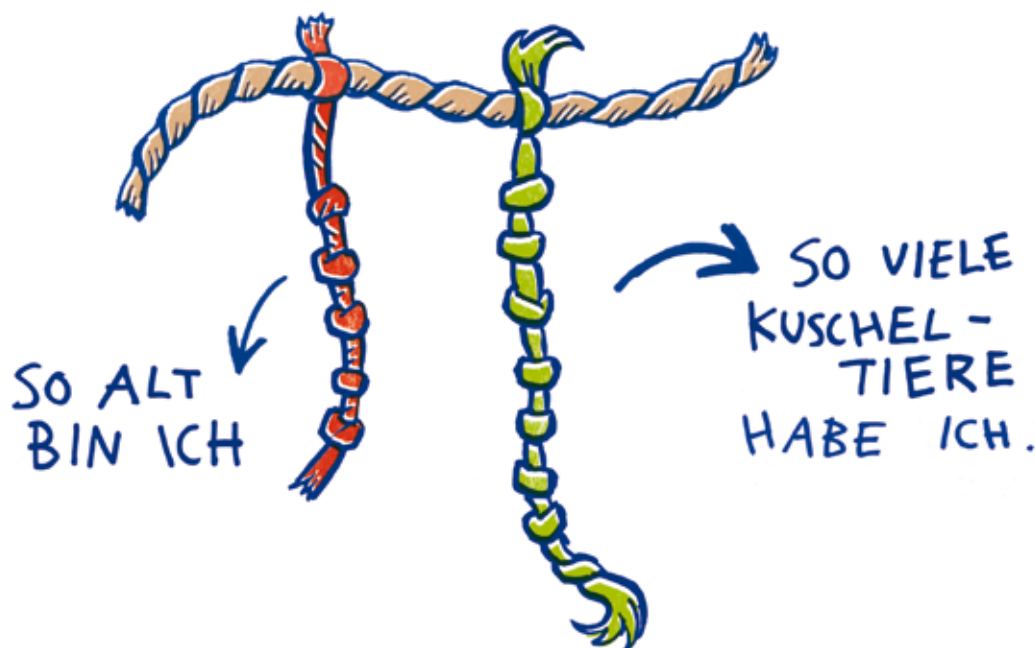


Beim Herstellen ihrer Knotenschüre stoßen die Kinder vielleicht auf größere Zahlen, z. B. auf die 24. Haben die Mädchen und Jungen eine Idee, wie sie die Zahl knoten können, ohne 24 einzelne Knoten zu machen? Lenken Sie die Aufmerksamkeit der Kinder auf unsere Zahlen: Wie machen wir das denn? Wofür steht die 2 in der 24, wofür die 4? Besprechen Sie mit den Mädchen und Jungen, dass die Inka hier genauso vorgegangen sind wie wir: Es gab Knoten für die Einer und Knoten für die Zehner – so brauchten sie nur 6 Knoten für die 24! Unten an der Schnur haben sie die Einer geknotet, mit etwas Abstand darüber die Zehner.

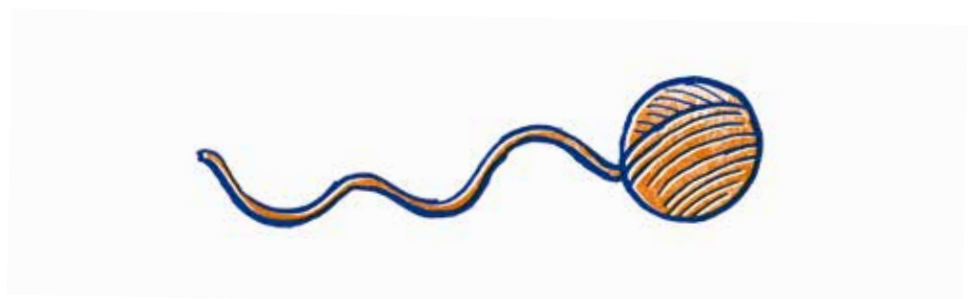


Vielleicht tauchen nicht nur ein- oder zweistellige, sondern noch größere Zahlen in den Knoten-Datenbanken der Kinder auf. Wie sieht z. B. die Knotenzahl aus, die zur Hausnummer 132 gehört? Auch hier wird genauso geknotet wie vorher: unten 2 Einer, darüber 3 Zehner und ganz oben ein Hunderter. Lassen Sie die Mädchen und Jungen ruhig eine Weile grübeln, und unterstützen Sie sie erst, wenn sie tatsächlich nicht weiterkommen.

Ist die Datenbank komplett, werden die Knotenschnüre an einen dickeren Faden oder einen dünnen Ast gebunden. Regen Sie die Kinder auch dazu an, eine Legende für ihre Knotenschnüre zu entwerfen.



Schauen Sie sich die Knoten-Datenbanken der Mädchen und Jungen gemeinsam an. Wer hat die größte Zahl geknotet, wer die kleinste? Sind alle Datenbanken gleich groß? Wofür stehen wohl die einzelnen Schnüre? Wer möchte, kann den anderen Kindern seine Datenbank vorstellen. Alternativ können die Mädchen und Jungen auch die Datenbank auswählen und die Bedeutung der Schnüre anhand der Legende erläutern. Haben die Kinder eine Idee, wem die Schnüre gehören?



WIE ZÄHLTE UND RECHNETE MAN FRÜHER, WIE WIRD ES IN DER ZUKUNFT SEIN?

Mathematische Erkenntnisse wurden von Menschen hervorgebracht. Was waren das eigentlich für Personen und wie haben sie gelebt? Wie konnten sie unter damaligen Verhältnissen zu ihren Forschungsergebnissen gelangen? Begeben Sie sich mit den Kindern auf eine Zeitreise in die Vergangenheit. Neben dem Forschen mit dem Mathematikkreis können hier fächerübergreifende Ideen eingebracht werden.

Die folgende Übersicht zeigt auf, wie Sie neben mathematischen auch geschichtliche, philosophische oder künstlerische Aspekte mit dem Thema „Zahlen, Zählen, Rechnen“ verknüpfen können. Außerdem finden Sie Impulse für einen erfinderischen Blick in die Zukunft, der Ihnen viele Anregungen für mathematische Entdeckungen liefert. Im möglichen Verlauf mit dem Mathematikkreis rekonstruieren die Mädchen und Jungen einen Lösungsweg, wie ihn auch schon Gauß, ein großer Mathematiker, als Schüler gegangen ist.



Pythagoras von Samos (570–510 v. Chr.)

„Die Zahl ist das Wesen aller Dinge.“

Bilder anschauen und analysieren:

Welche Dinge gibt es?

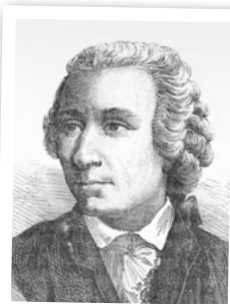
Welche Formen und Farben haben sie?

Was ist oben, was unten?

Sich selbst inszenieren:

Welche Gegenstände zeichnen mich aus?

Wie würde ich ein Bild von mir gestalten?



Leonard Euler (1707–1783)

1771 erblindete Leonhard Euler. Fast die Hälfte seines Lebenswerks entstand nach der Erblindung.

Szenisches Spielen:

Lösen einer Matheaufgabe mit verbundenen Augen: Wie forsche ich, wenn ich nicht sehen kann?



VERGANGENHEIT

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Als siebenjähriger Schüler bekam Gauß von seinem Lehrer die Rechenaufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Schon nach kurzer Zeit zeigte Gauß ihm das richtige Ergebnis: 5050.

Mehr Wissen



Gauß bildete aus den Zahlen (1, 2, 3 ... 98, 99, 100)

Paare: $100 + 1 = 101$ und $99 + 2 = 101$... $50 + 51 = 101$.

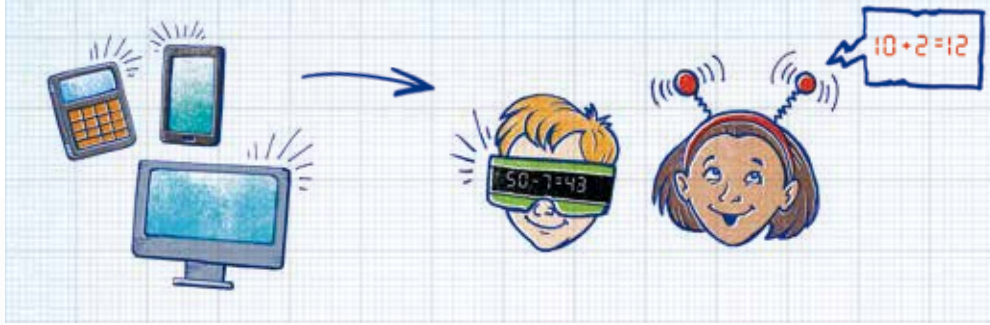
Daraus folgt: $50 \cdot 101 = 5.050$.

Mathematisches Forschen/Rekonstruieren:

Wie addiere ich die Zahlen von 1 bis 20 / 1 bis 100 schlau?

Taschenrechner, Computer, Smartphone, Smartwatch und smarte Brillen:

Wie werden Zählen und Rechnen in der Zukunft unterstützt?



Wenn Kraken uns beim Zählen helfen:

Kraken zählen natürlich anders als wir, weil sie nicht 10 Finger, sondern 8 Beine haben. Wie sieht beispielsweise die 10 auf Krakisch aus?



Meine Kraken-Zählmaschine



Eine Kopiervorlage der Kraken-Zählmaschine finden Sie am Ende der Broschüre.

Das Zählen und Rechnen in anderen Zahlensystemen ist für uns erst mal sehr ungewohnt. Es ist deshalb wichtig, sich dafür geeignete Strukturierhilfen zu suchen (z. B. ein passend geschnittener Eierkarton, ein Abakus für das jeweilige Zahlensystem etc.).

Mehr Wissen



EIN MÖGLICHER VERLAUF: WIE RECHNE ICH SCHLAU?



Erzählen Sie den Kindern die Geschichte des siebenjährigen Schülers Gauß, der von seinem Lehrer die Aufgabe bekam, die ersten 100 Zahlen zu addieren. Gauß nutzte einen bestimmten Trick und gelangte dadurch zum Erstaunen des Lehrers sehr schnell zu einer Lösung. Wie hat er das wohl gemacht? Wie lassen sich Zahlen, die aufeinanderfolgen, schlaue zusammenrechnen? Beginnen Sie mit den Mädchen und Jungen je nach bereits gemachten Erfahrungen und vorhandenem Wissen mit Zahlen von 1 bis 5, 10, 20 oder 30.



Besprechen Sie mit den Kindern, was die Aufgabe des Lehrers, die an den kleinen Gauß gestellt wurde, alles beinhaltet. Um welche Zahlen handelt es sich? Was soll genau gerechnet werden? Die Mädchen und Jungen kommen zu dem Schluss, dass zur Eins die Zwei, die Drei, die Vier etc. bis zur festgelegten Zahl dazugerechnet werden sollen. Zeigen Sie den Kindern eine Darstellung der Aufgabe als Punktbild; hier: $1 + 2 + 3 + 4$.

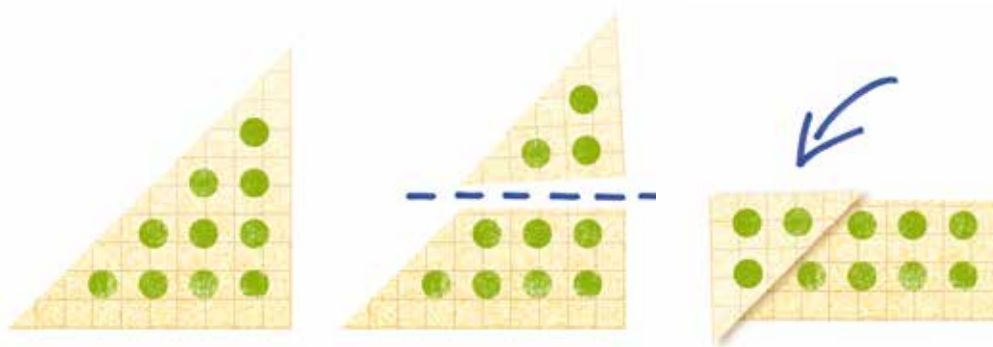


Die Zahlen ergeben zusammen ein großes Dreieck. Die Frage lautet nun: Wie bekomme ich heraus, wie viele Punkte es bei einem Dreieck mit z. B. 20 Punkten in der untersten Reihe sind?



Die Mädchen und Jungen probieren es nun aus. Sie erhalten Legeplättchen und legen damit ein Dreieck mit den Zahlen von eins bis vier. Sie legen das nächstgrößere Dreieck und zählen oder errechnen die Punkte. Weisen Sie die Kinder darauf hin, dass sie die Form der Anordnung der Punkte auch verändern können. Die Mädchen und Jungen schieben die Punkte und verteilen sie um. Welche Form der Anordnung ist sinnvoll, um leichter herauszufinden, wie viele Punkte es sind. Die Kinder dürfen beim Schieben die Anzahl der Punkte nicht verändern.

Möglicherweise erkennen die Mädchen und Jungen, dass sich die Summe, wenn die Punkte nicht in einer Dreiecksform, sondern in einer Vierecksform liegen, leicht durch Malrechnen ermitteln lässt: Aus $1 + 2 + 3 + 4$ wird einfach $2 \cdot 5$.

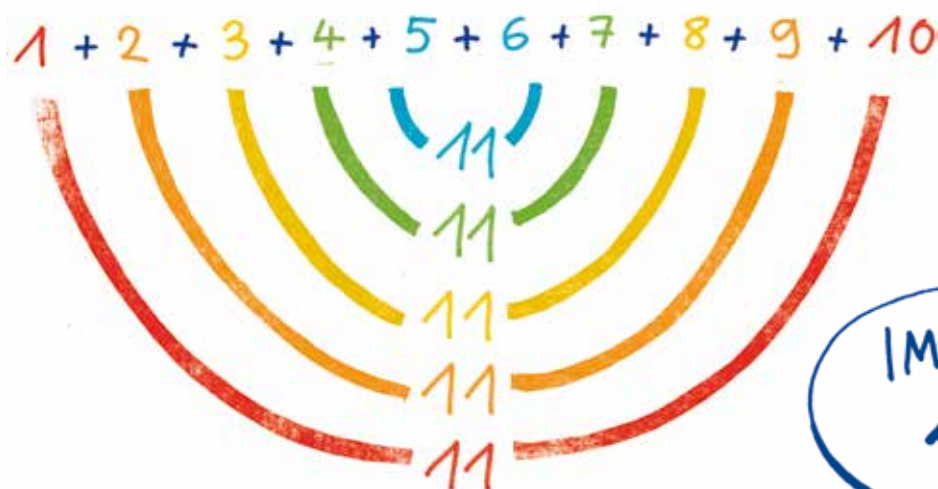


Aus einem Dreieck wird ein Viereck gemacht: Dazu schneidet man z. B. das Dreieck in zwei Teile und setzt diese dann zu einem Viereck zusammen.

Klappt das auch bei kleineren oder größeren Dreiecken? Wie würde dann die Malaufgabe für das jeweilige Viereck aussehen? Wie viele Punkte hat ein Dreieck mit 10 oder 20 Punkten in der untersten Reihe? Die Kinder prüfen ihr gefundenes Muster. Sie übertragen es nun auf die Anfangsfrage: Wie viel ist die Summe der ersten 5, 10, 20 oder 30 Zahlen?



Haben die Mädchen und Jungen vielleicht noch weitere Tricks gefunden, die Aufgaben zu lösen? Eine andere Idee wäre, am Beispiel der Summe der ersten 10 Zahlen gezeigt, die erste und die letzte Zahl zu addieren ($1 + 10 = 11$), anschließend die jeweils benachbarten ($2 + 9 = 11$, dann $3 + 8 = 11$ etc.) bis zur Mitte ($5 + 6 = 11$). So ist die Summe ganz einfach zu errechnen: $5 \cdot 11 = 55$. Die Kinder stellen sich ihre verschiedenen Lösungswege und Ideen gegenseitig vor und prüfen, ob die Ergebnisse am Ende gleich sind.

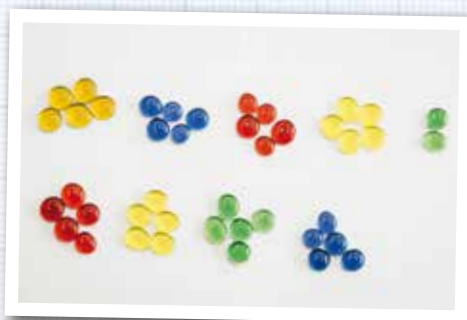


ZAHLENMUSTER

Es ist Herbst. Die Blätter fallen von den Bäumen. Die Mädchen und Jungen haben draußen in Körben und Eimern Kastanien gesammelt. Gemeinsam tragen sie die vollen Gefäße in den Gruppenraum und breiten die riesige Menge an Kastanien vor sich auf dem Boden aus. Eine ähnliche Situation entsteht, wenn die Kinder eine Dose randvoll gefüllt mit Muggelsteinen entdecken – beides bietet einen Ausgangspunkt für vielfältige mathematische Aktivitäten. Beobachten Sie die Mädchen und Jungen dabei, was sie nun mit den Kastanien oder den Muggelsteinen tun. Sie können diese zum Legen und Bauen von Figuren nutzen. Sie können mit ihnen Spiele spielen oder sie zählen. In vielen Handlungen der Kinder steckt automatisch jede Menge Mathematik.

Die folgende Übersicht bietet Ihnen Anregungen, wie Sie die Mädchen und Jungen dabei begleiten können, mit einer großen Menge gleicher Dinge²⁶ oder anderen anregenden Materialien Zahlenmuster zu entdecken und zu erforschen. Ein möglicher Verlauf mit dem Mathematikkreis zeigt, wie Sie mit den Kindern beim Tischkartenbasteln Zahlenmuster untersuchen und nutzen können.

Wie kann ich gut zählen?



... MIT
MUGGELSTEINEN

Welche Zahlen finde ich?



Wie geht es weiter?





Weitere Anregungen zum Zählen
finden Sie auf der Entdeckungskarte
„Große Menge gleicher Dinge“.

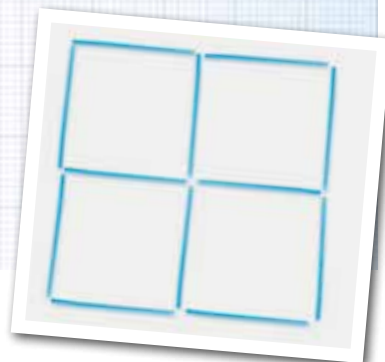
Wie kann ich gut zählen?



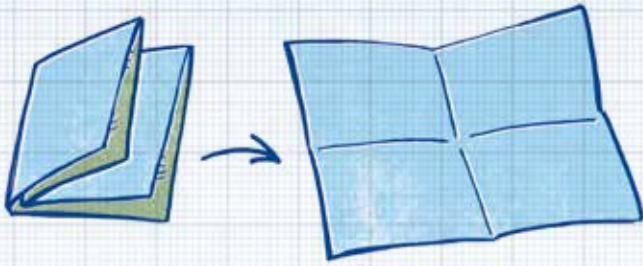
...MIT
TRINKHALMEN



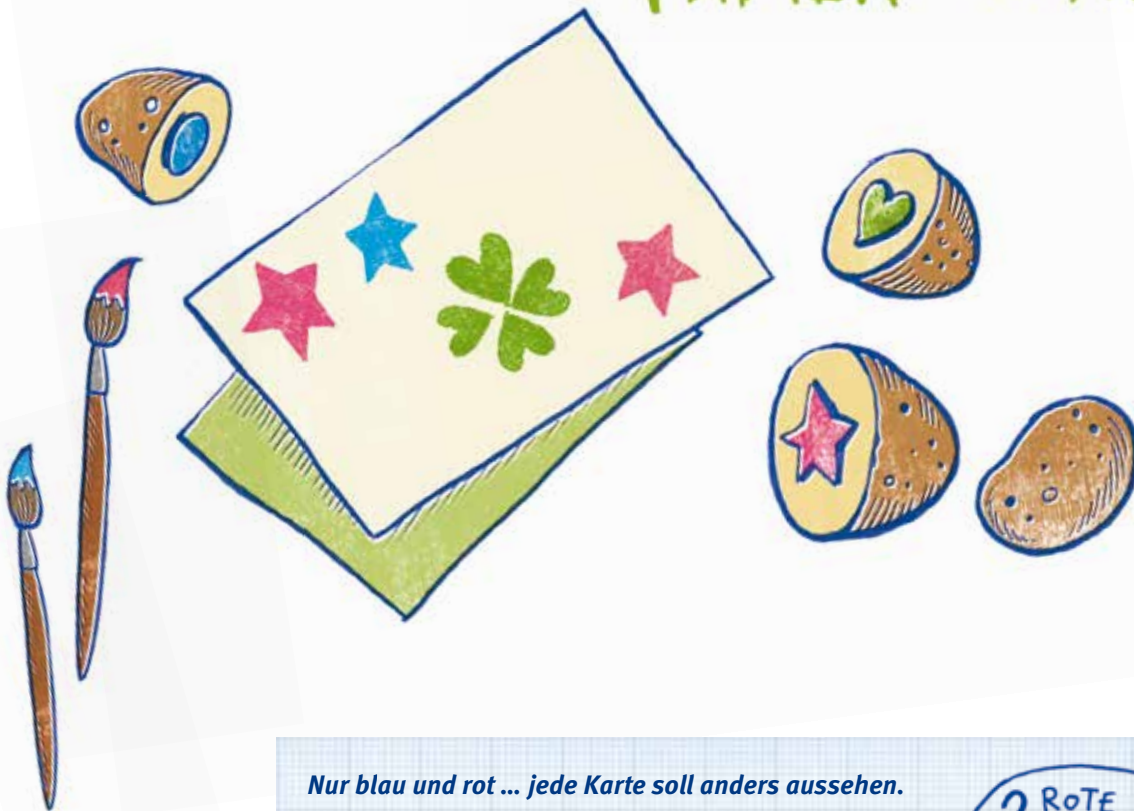
Wie geht es weiter?



Wie viele Tischkarten habe ich, wenn ich noch einmal falte?



... MIT PAPIER UND FARBE



Nur blau und rot ... jede Karte soll anders aussehen.



Mehr Wissen



Mit der Gestaltung der Tischkarten setzen sich die Kinder spielerisch mit der Zahlzerlegung auseinander: Es sitzen sechs Kinder am Tisch, vier Sterne werden blau gestempelt – wie viele sind dann rot?

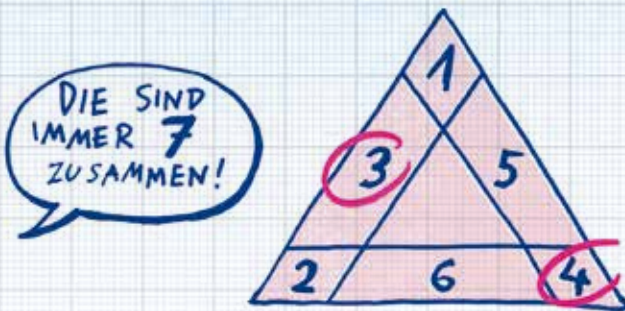
Welche Figur kann ich noch stempeln?



Weitere Anregungen finden Sie auf der Entdeckungskarte „Geschmackssache“.

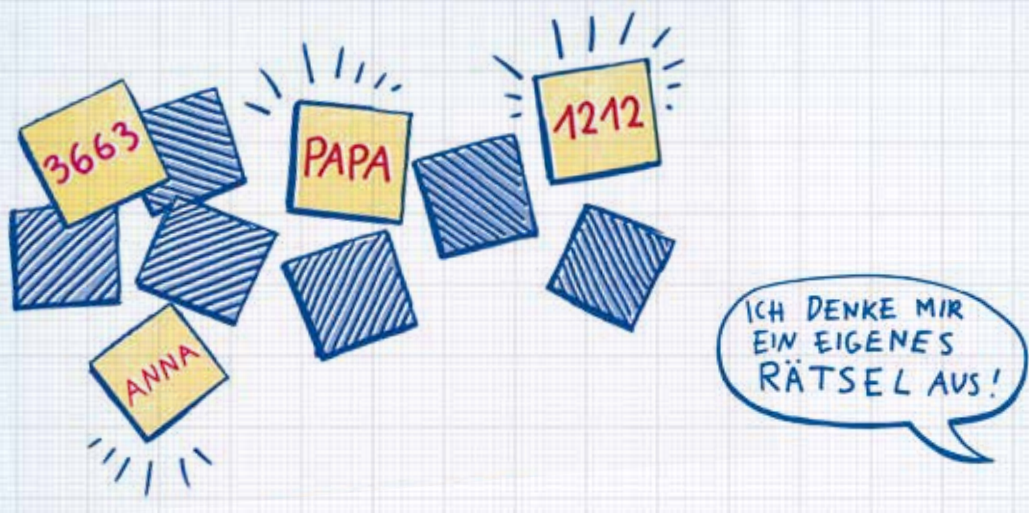
...MIT DEM KÖPFCHEN

Was lässt sich alles entdecken? ²⁷



Entdecken Sie weitere Zahlenmuster mit erfahreneren Kindern auf den Entdeckungskarten "Alles quadratisch?" und "Teilen mit Muggelsteinen".

Welches Pärchen finde ich noch?



EIN MÖGLICHER VERLAUF: TISCHKARTEN BASTELN



Nehmen Sie doch ein anstehendes Ereignis wie Ostern oder den Martinstag zum Anlass, sich gemeinsam mit den Kindern eine besondere Dekoration für den Esstisch auszudenken. Welche Ideen haben die Mädchen und Jungen? Aus buntem Papier lassen sich beispielsweise Girlanden basteln, die von der Decke hängend den Esstisch schmücken. Oder wie wäre es zur Feier des Tages mit selbst gebastelten Tischkärtchen? Zeigen Sie den Kindern ein großes, dickeres Blatt Papier im DIN-A1- oder DIN-A2-Format. So ein Tischkärtchen wäre vielleicht etwas groß – haben die Mädchen und Jungen eine Idee, wie sie daraus gleich große kleine Kärtchen machen können?



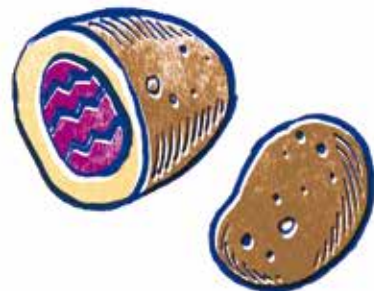
Besprechen Sie mit den Kindern, dass sie das große Blatt Papier aufeinanderklappen und entlang der Faltkante schneiden können, um ein kleines Format zu erhalten. Wie viele Tischkärtchen benötigen die Mädchen und Jungen denn für jeden Tisch? Dafür verteilen sich die Kinder auf die Tische. Hat jedes Kind seinen Platz, zählen Sie gemeinsam mit den Mädchen und Jungen Tisch für Tisch durch: eins, zwei, drei ...



Legen Sie das große Blatt Papier quer vor sich und falten Sie es einmal in der Mitte zusammen: Wie viele Tischkarten zählen die Kinder? Wie viele zählen sie, wenn Sie noch einmal falten und dann erneut? Zählen Sie jedes Mal gemeinsam, wie viele kleinere Tischkärtchen entstanden sind, indem Sie mit dem Finger die einzelnen Bereiche antippen.



Lenken Sie die Aufmerksamkeit der Mädchen und Jungen darauf, in welchem Verhältnis die alte zur jeweils neuen Anzahl der Tischkarten steht, indem Sie die Beobachtungen der Kinder verbal begleiten: Aus einer Karte sind zwei geworden, aus zwei sind vier geworden und aus vier sind acht geworden. Erkennen die Mädchen und Jungen, was hier jedes Mal passiert? Weiß jemand, wie man so etwas nennt? Vielleicht hat ein Kind bereits vom Verdoppeln gehört. Ist dies nicht der Fall, teilen Sie ihnen gern mit, wie das in der „Fachsprache“ heißt – Kinder sind neugierig, neue Begriffe zu lernen.

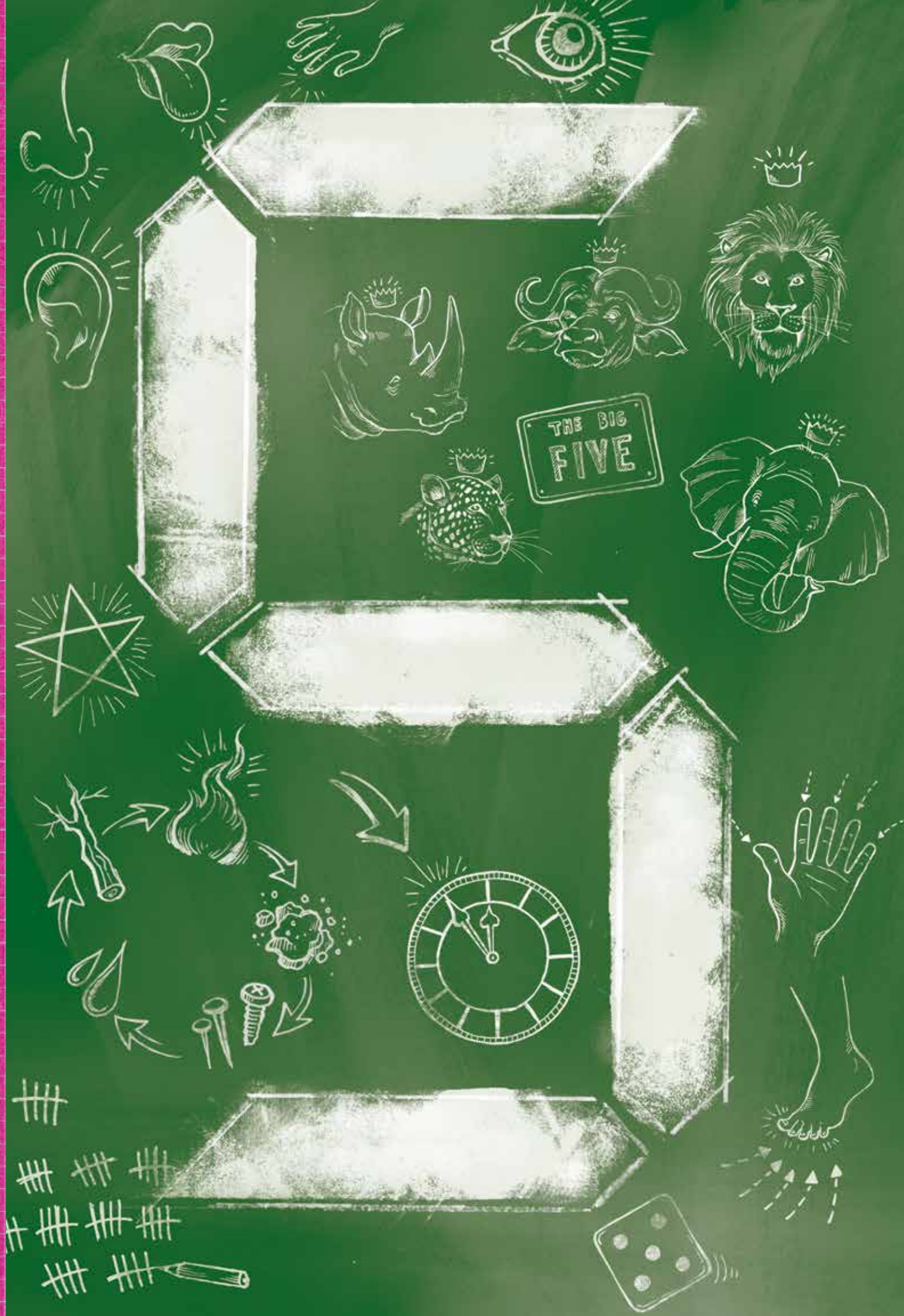


Damit für die Gestaltung der Karte ausreichend Platz ist, bietet sich eine Größe im DIN- A5-Format an. Sind die bisher durch Falten entstanden Kärtchen klein genug? Bevor Sie ein weiteres Mal falten, überlegen Sie gemeinsam, wie viele Kärtchen es danach wohl gibt: Haben die Mädchen und Jungen eine Idee? Wie viele haben sie, wenn Sie danach noch einmal falten? Wiederholen Sie das Falten so oft, bis die entstandenen Bereiche ein passendes Format haben, und lassen Sie die Kinder das Papier entlang der Faltkanten in kleinere Stücke schneiden.



Knicken Sie gemeinsam jedes Papier einmal über die lange Kante und zählen Sie zusammen die entstandenen Blanko-Tischkärtchen: Reichen die Kärtchen für alle Mädchen und Jungen? Was soll darauf stehen? Eine Möglichkeit wäre, für jeden Tisch die Anzahl der Kinder, die an ihm sitzen, abzubilden. Die Tischkärtchen sollen natürlich schön bunt sein und zum anstehenden Fest passen – welche Ideen haben die Mädchen und Jungen, wie sie ihre Zahl darstellen können? Welches Motiv eignet sich für das Fest? Und so beginnt der Mathematikkreis aufs Neue.





HAT DAS ZÄHLEN EIN ENDE?

Eigentlich tun wir es tagtäglich: zählen. Wir zählen nach, ob wir genug Taschentücher dabei haben, zählen die Tage bis zum nächsten Wochenende – und wenn es uns überkommt, zählen wir vielleicht auch mal die Stufen von unten bis zu unserer Wohnungstür.

Was wir dazu brauchen sind Zahlen. Und zwar nicht irgendwelche Zahlen, sondern die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 etc. Einige Mathematikerinnen und Mathematiker zählen auch die Null zu den natürlichen Zahlen. Zum Zählen brauchen wir sie aber eher selten und fangen daher fast immer bei 1 an (ein Taschentuch, zwei Taschentücher ...).

Zählen wir Dinge im Alltag, haben wir es oft mit einer kleineren Anzahl zu tun. Selten kommen wir in die Verlegenheit, eine wirklich große Menge auszuzählen, wie beispielsweise die Reiskörner in einem Topf. Das ist natürlich möglich – rein theoretisch –, aber den meisten fehlt die Geduld dazu oder sie sehen keinen Sinn darin.

Wer aber trotzdem einmal ganz viele Reiskörner zählen möchte, der kann ein Gedankenexperiment machen. Dieses geht auf eine indische Legende zurück, nach der der Erfinder des Schachbretts sich vom König so viele Reiskörner wie folgt wünschte: Auf das erste Feld des Schachbretts kommt ein Reiskorn, auf das zweite kommen zwei, auf das dritte vier etc. bis zum 64. Feld. Auf jedem Feld liegen also immer doppelt so viele Reiskörner wie auf dem vorherigen. Das hört sich erst mal nicht viel an, aber eine einfache Rechnung zeigt: Auf dem Schachbrett müssten am Ende mehr als 18 Trillionen Reiskörner liegen – das ist eine 18 mit 18 Nullen! So viele Reiskörner passen natürlich auf kein Schachbrett der Welt, man könnte mit ihnen die gesamte Erdoberfläche bedecken.



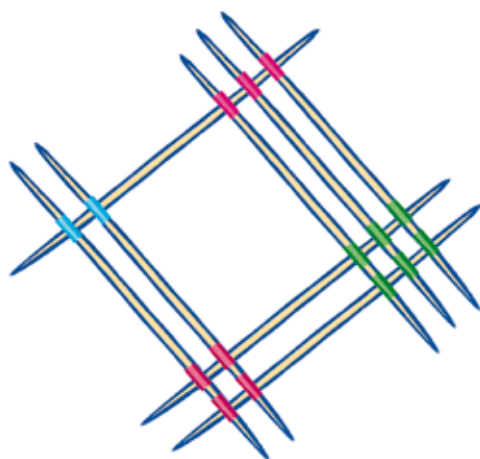
Weitere unfassbar große Zahlen sind beispielsweise eine Trilliarde (eine Eins mit 21 Nullen) oder ein Googol, nach der die Suchmaschine Google benannt wurde – sie hat 100 Nullen!

Stellt sich nun die Frage, wann das Zählen denn eigentlich aufhört. Die Antwort lautet: nie. Nehmen wir einmal an, wir wären bei der größten Zahl angekommen – dann könnten wir einfach eine Zahl weiterzählen und es wäre schon nicht mehr die größte Zahl. Auch die nächste nicht und die übernächste ebenfalls nicht. Wir könnten also immer weiter- und weiterzählen. Ein faszinierendes Gedankenspiel, bei dem es so manchem schwindelig wird – und das die Mathematik **unendlich** nennt.

MALNEHMEN MAL ANDERS

Das Multiplizieren zweistelliger Zahlen kann recht mühselig sein. Wer weder einen Taschenrechner zur Hand hat noch über ein ausgeprägtes Kopfrechentalent verfügt, der multipliziert schriftlich. Aber es gibt auch eine andere Möglichkeit: Die alten Chinesen haben eine visuelle Methode erfunden, mit der das Malnehmen blitzschnell geht – und auch noch Spaß macht.

Beginnen wir mit $23 \cdot 12$: Für die Zehner und Einer werden entsprechend viele schräge Linien gezeichnet, die sich überkreuzen. Wer nicht malen möchte, kann sie auch ganz einfach mit Mikadostäbchen oder Spaghetti legen.



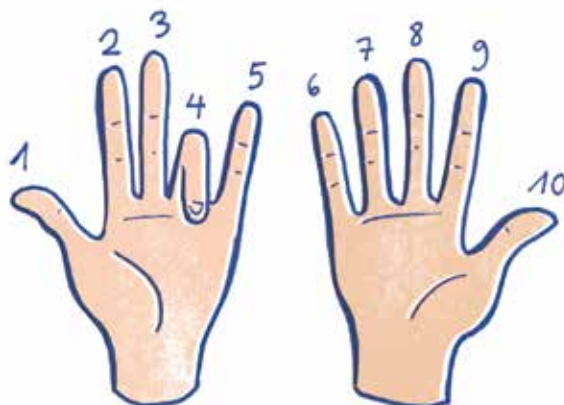
$$\begin{array}{r} 23 \cdot 12 \\ \hline 23 \\ 46 \\ \hline 276 \end{array}$$

Dieses Verfahren scheint auf den ersten Blick ganz anders zu sein als unser schriftliches, ist es in Wirklichkeit aber gar nicht. Schaut man sich nämlich die Farbcodierung noch einmal genau an, lassen sich viele Gemeinsamkeiten entdecken.

Eine Multiplizierhilfe ganz anderer Art tragen wir ständig mit uns herum: unsere Hände. Hände eignen sich nämlich nicht nur zum Addieren oder Subtrahieren, sondern mit ihnen geht auch das Multiplizieren mit kleinen Zahlen ganz schnell und einfach. Sie waren daher ein beliebtes Hilfsmittel bei den alten Ägyptern, Persern, Griechen und später den Römern – also zu einer Zeit, als es noch keinen Taschenrechner gab und Papier noch sehr kostbar war.

Für die Neunerreihe gibt es einen ganz besonderen Fingertrick: Multipliziert man die 9 wie im Beispiel mit der 4, wird der vierte Finger umgeknickt. Das Ergebnis lässt sich nun ganz einfach ablesen: die Zehner ergeben sich aus den Fingern davor (3 Finger), die Einer aus den Fingern dahinter (6 Finger) – das Ergebnis ist also 36.

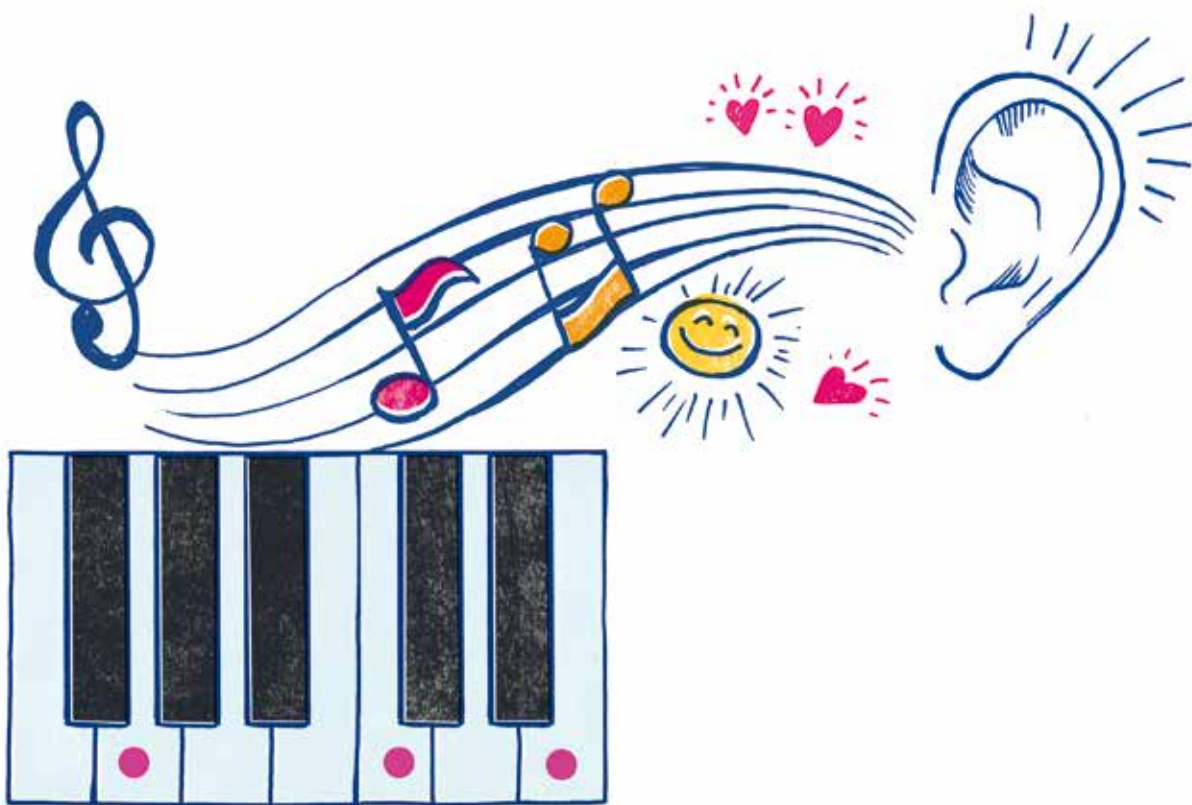
$$4 \cdot 9$$



DIE MUSIK-FORMEL

Mathematik gilt als eindeutig, kühl und logisch, Musik hingegen als vielseitig, gefühlsbetont und kreativ. Was haben die beiden also gemeinsam? Erst mal gar nicht viel, wie es scheint – doch weit gefehlt. Tatsächlich sind Mathematik und Musik eng miteinander verknüpft und tauchen in den unterschiedlichsten Musikepochen in enger Beziehung zueinander auf.

Erste Erkenntnisse reichen bis ins antike Griechenland (ca. 550 v. Chr.) zurück. Der Legende nach hat Pythagoras herausgefunden, dass sich Töne durch Zahlen und Klänge durch Zahlverhältnisse beschreiben lassen. Er erkannte, dass die Tonhöhe von der Länge einer schwingenden Saite abhängt – je kürzer die Saite, desto höher ist der Ton. Ist eine Saite beispielsweise halb so lang wie eine andere, ist der Ton doppelt so hoch, ist sie nur ein Drittel so lang, ist der Ton dreimal so hoch. Weiterhin fand er heraus, dass ein Zweiklang (Intervall) nur dann harmonisch und schön für uns klingt, wenn sich das Verhältnis der Saitenlängen durch ein einfaches Zahlenverhältnis beschreiben lässt. Wird die Saite z. B. im Verhältnis 1:2 geteilt, so bilden die Töne auf den beiden Saiten eine Oktave, wird sie im Verhältnis 2:3 geteilt, eine Quinte.



Besteht ein derart einfaches Zahlenverhältnis nicht und sind die Zahlen insbesondere zu groß, wird der Zusammenklang der beiden Töne als dissonant empfunden – zumindest für Menschen der westlichen Musikkultur. Ein Beispiel ist der Halbtonschritt 16:15 – die Töne liegen zu nah beieinander und das Ohr schlägt Alarm.

Für Pythagoras war Musizieren im Grunde nichts anderes als eine mathematische Betätigung. Die Einsicht, dass sich Harmonien auf einfache Bruchzahlen zurückführen lassen, bestätigte ihn darin, in der Zahlenwelt eine Art göttliches Prinzip zu sehen. Die sich daraus entwickelnde Harmonielehre hat die europäische Musik entscheidend geprägt.

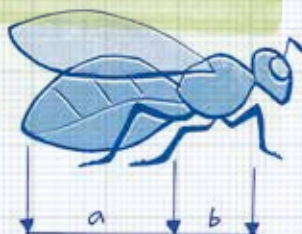
BESONDERE ZAHLEN

φ

Die Goldene Zahl ...

... ist so außergewöhnlich, wie ihr Name klingt. Sie besitzt unendlich viele Nachkommastellen ($\varphi \approx 1,618$), wird mit dem griechischen Buchstaben Phi bezeichnet, und wie es ihr Name schon verrät: Sie hängt ganz eng mit dem Goldenen Schnitt zusammen. Genau genommen liegt ein Goldener Schnitt dann vor, wenn φ als Verhältnis zweier Strecken a und b herauskommt (a geteilt durch b gleich φ).

Dieses Verhältnis wird seit jeher von Menschen als schön und harmonisch empfunden und findet sich in der Natur erstaunlich oft wieder: beim Menschen (z. B. teilt der Bauchnabel den Abstand Scheitel – Sohle im Goldenen Schnitt), bei Bienen und in vielen Blüten – um nur einige Beispiele zu nennen.

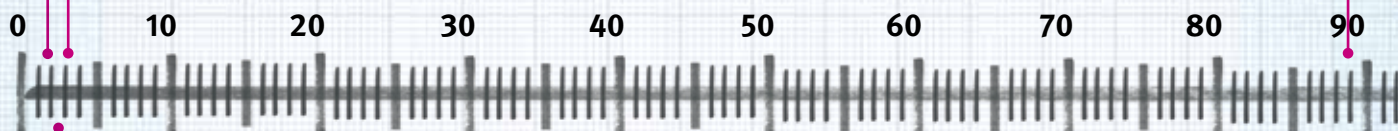
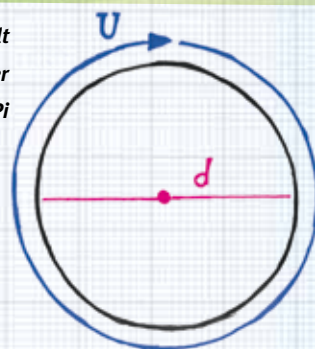


π

Die Kreiszahl Pi ...

... ist eine der berühmtesten Zahlen in der Geschichte der Mathematik und taucht immer dann auf, wenn wir es mit Kreisen, Ovalen oder ähnlich runden Dingen zu tun haben. Pi ist nichts anderes als das Verhältnis vom Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser. Egal wie groß oder klitzeklein der Kreis ist – sein Umfang ist immer rund 3,14-mal größer als der Durchmesser! Weil auch Pi hinter dem Komma unendlich lang ist, schreibt man stets einfach nur „ π “.

Umfang geteilt durch Durchmesser gleich Pi

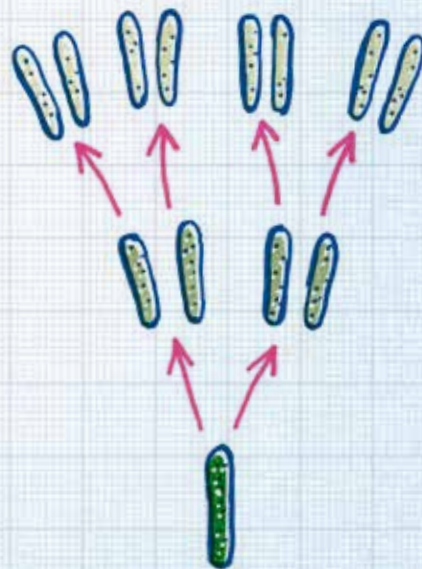


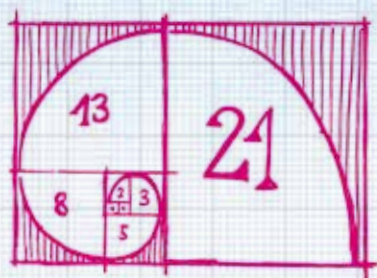
e^x

Die Eulersche Zahl ...

... ist das, was sich hinter e^x verbirgt. Aber was genau ist das denn? Ihren Namen verdankt die Zahl ihrem Entdecker, dem Schweizer Mathematiker Leonard Euler (1707–1783). Auch sie besitzt unendlich viele Nachkommastellen und ist näherungsweise 2,718. Die Eulersche Zahl taucht immer dann auf, wenn sich etwas kaskadenartig vermehrt oder verringert, wie beispielsweise Bakterien. Bakterien verbreiten sich nämlich so rasend schnell, weil sich jedes Bakterium innerhalb eines festgelegten Zeitraums teilt.

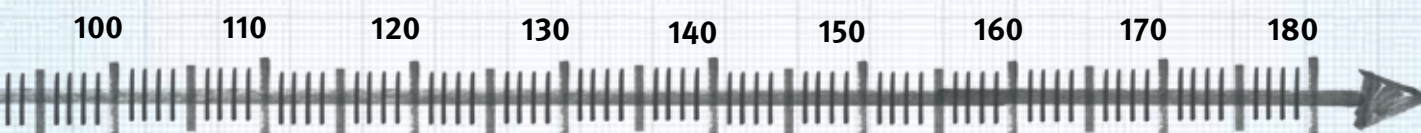
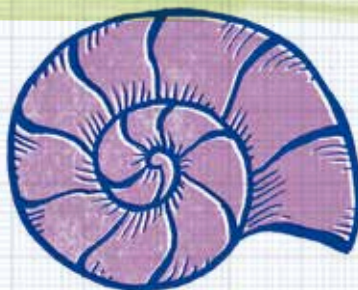
Aus 1 Bakterium werden 2, dann 4, 8, 16 etc. In jedem Schritt verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien – nach 10 Schritten sind es bereits 1.024! Wie viele Bakterien gibt es nun nach einer bestimmten Wartezeit? Um das zu beschreiben, verwenden die Mathematikerinnen und Mathematiker keine andere Zahl als e . Ein weiteres Beispiel für einen solchen Wachstumsprozess ist der radioaktive Zerfall.





Fibonacci-Zahlen ...

... sind eine Folge unendlich vieler Zahlen, die sich ganz einfach bilden lässt: Angfangen mit 0 und 1, ergibt sich jede weitere Zahl aus der Summe ihrer Vorgängerzahlen: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Die Fibonacci-Zahlen tauchen erstaunlicherweise in vielen Wachstumsprozessen der Natur auf. Schneidet man z. B. Schneckenhäuser auf und malt Quadrate hinein, findet man sie in deren Seitenlängen wieder.



2, 3, 5, 7...

Primzahlen ...

... könnten auch als einsame Zahlen bezeichnet werden. Anders als beispielsweise die 16 oder die 24 lässt sich eine Primzahl nur durch zwei Zahlen teilen: durch die 1 und sich selbst. Theoretisch lässt sich zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt – praktisch dauert das Berechnen großer Primzahlen allerdings so lange, dass Computer an die Grenzen ihrer Rechenleistung kommen. Die derzeit größte bekannte Primzahl ist die Zahl $2^{57.885.161} - 1$. In voller Länge ausgeschrieben, hat sie mehr als 17,4 Millionen Stellen! Um sie zu berechnen, war ein Computer ganze 39 Tage beschäftigt.



WIE MATHEMATIK IN UNSERE SPRACHE KOMMT

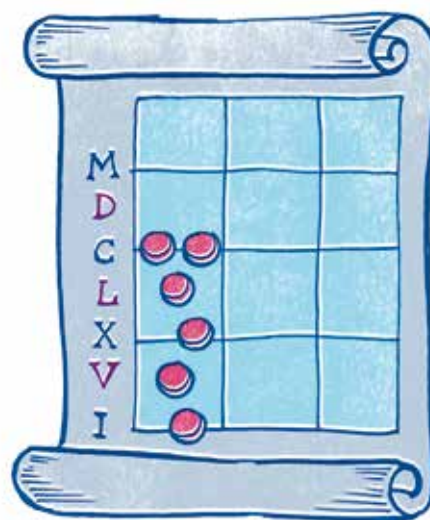
Ohne dass wir es merken, finden sich in unserer Sprache bei vielen Gelegenheiten Begriffe der Mathematik wieder. Aber warum eigentlich? Oft liegen diesen Redewendungen Geschichten oder Rituale zugrunde, die heute sinnbildlich für bestimmte Handlungen stehen – nicht selten kommen sie auch aus der Mathematik selbst.

Im Dreieck springen

Ist jemand so richtig wütend, springt er im Dreieck – sagt man. Diese Redewendung geht auf das Jahr 1883 zurück, in dem der in Berlin in Einzelhaft sitzende Insasse Albert aus seiner Zelle in einen zehn Quadratmeter großen, dreieckigen Innenhof geführt wurde. Anstatt spazieren zu gehen, musste er seiner Wut freien Lauf lassen und sprang wie wild zwischen den drei Wänden umher.

Vom Hundertsten ins Tausendste

Kommt jemand „vom Hundertsten ins Tausendste“, kann er sich beim Erzählen nicht kurzfassen. Diese Redensart geht auf eine Rechenweise zurück, wie sie im alten Rom praktiziert wurde: Für die Zahlen wurden Steinchen auf ein Tuch gelegt, das mit waagerechten und senkrechten Linien versehen war. Die waagerechten Linien standen für die Dezimalwerte eins, zehn, hundert, tausend, der Platz dazwischen war für die Fünf und ihre Vielfachen vorgesehen (fünf, fünfzig, fünfhundert). Beim Hin- und Herschieben der Steinchen passierte es nun gelegentlich, dass ein Steinchen von der Hunderter- auf die Tausenderlinie rutschte und somit das Ergebnis völlig falsch war. Daher wurde das Sprichwort ursprünglich dafür verwendet, wenn etwas durcheinandergekommen war, und erhielt erst später seine heutige Bedeutung – also nicht von Hundert, sondern von Tausend Dingen zu sprechen.



Einen gemeinsamen Nenner finden

Diese Redewendung entspringt der Bruchrechnung: Um zwei Brüche zusammenzubringen, werden sie auf einen gemeinsamen Nenner gebracht. In diesem Sinne kommen zwei sich Streitende nur dann zu einem Konsens, wenn sie ihren gemeinsamen Nenner finden.

Drei Kreuze machen

Der Ursprung ist religiöser Natur: Gläubige Katholiken bekreuzigen sich dreimal mit dem rechten Zeigefinger, wenn sie einer brenzigen Situation entkommen sind.

Pi mal Daumen

Seit jeher nehmen Menschen ihre Finger beim Rechnen zu Hilfe. Insbesondere der Daumen dient der groben Einschätzung von Entfernungen („über den Daumen peilen“). Pi ist im Grunde genommen eine exakte Zahl mit unendlich vielen Stellen hinter dem Komma, die aber der Einfachheit halber meist gerundet wird (3,14) – und wird in dem Sinne ein ebenso ungenauer Parameter wie der Daumen. Beides zusammen ergibt eine scherzhafte Redensart, die eine grobe Einschätzung ausdrückt.

Null-Acht-Fünfzehn ...

... steht für das ganz Gewöhnliche. Gewöhnlich, weil besonders nachgefragt, war im Ersten Weltkrieg ein Maschinengewehr aus dem Jahre 1908, das 1915 weiterentwickelt wurde. Dadurch wurde es noch beliebter und zum Standardgewehr „08/15“.

EIN INTERVIEW ÜBER DIE ZEHN



Kim: Hallo Jona. Du weißt ja so viel über die Zahl Zehn. Was macht sie denn so besonders?

Jona: Hallo Kim. Also, das Tollste ist, dass wir ja auch zehn Finger haben und Zahlen mit den Fingern total einfach zeigen können. Wenn du z. B. die Vierzehn zeigen willst, nimmst du einmal beide Hände und danach zeigst Du vier Finger, also 10 plus 4.

Kim: Rechnen so alle Menschen?

Jona: Sehr viele. Angefangen haben die Menschen in Indien damit vor vielen vielen Jahren. Sie benutzten für die geschriebenen Zahlen bloß noch die Ziffern 1 bis 9. Die Null gab es erst später – damals als Punkt oder Kreis geschrieben. Die alten Römer nannten die Zehn **decem**. Heute sagt man deshalb auch Dezimalsystem zu unseren Zahlen.

Kim: Das ist ja ein komisches Wort. Was bedeutet Dezimalsystem denn genau?

Jona: Denk noch mal an die 14. Sie besteht aus zwei Ziffern, der 1 und der 4. Das bedeutet 1 Zehner und 4 Einer. Die Stelle, an der eine Ziffer steht, hat also einen ganz bestimmten Wert. Das Dezimalsystem ist also ein Stellenwertsystem auf Basis der 10. So sind bei uns die Zahlen aufgebaut.

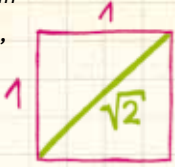
TAUSENDER	HUNDERTER	ZEHNER	EINER
		1	4

Kim: Sagt man zu unseren Zahlen nicht auch arabische Zahlen?

Jona: Ja, denn es mussten einige Jahrhunderte vergehen, bis das Dezimalsystem, dank der Araber, bei uns in Europa ankam.

Kim: Toll. Danke dir, Jona.

GLOSSAR

ZAHLENRÄUME	
N Natürliche Zahlen $1, 2, 3 \dots$ Zu jeder Zahl lässt sich immer noch eine 1 addieren. Manchmal gehört auch die 0 zu ihnen. 	Z Ganze Zahlen $\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$ Zu bzw. von jeder Zahl lässt sich immer noch eine 1 addieren oder subtrahieren. 
Q Rationale Zahlen $-\frac{1}{2}, 0,7, 0,\overline{3}, 1\frac{3}{4}, 2 \dots$ Jede Zahl lässt sich als Quotient von zwei ganzen Zahlen darstellen. Beispiel: $0,7 = \frac{7}{10}$ $2 = \frac{2}{1}$ $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ 	R/Q Irrationale Zahlen $\pi, \sqrt{2} \dots$ Irrationale Zahlen lassen sich als Dezimalzahl mit unendlich vielen Stellen hinter dem Komma schreiben, die sich nicht periodisch wiederholen. Beispiel: $\pi = 3,14159 \dots$ 
Q UND R/Q ERGEBEN ZUSAMMEN DIE REELLEN ZAHLEN R.	

GRUNDRECHENARTEN	
Addition $12 + 3 = 15$ SUMMAND + SUMMAND = SUMME	Subtraktion $12 - 3 = 9$ MINUEND - SUBTRAHEND = DIFFERENZ
Multiplikation $12 \cdot 3 = 36$ FAKTOR • FAKTOR = PRODUKT	Division $12 : 3 = 4$ DIVIDEND : DIVISOR = QUOTIENT

WICHTIGE BEGRIFFE

Binärsystem: Zahlensystem, das auf der Zahl 2 basiert. In einer Binärzahl stehen nur die Ziffern 0 und 1; die ersten fünf Zahlen, im Binärsystem geschrieben, sind: 1, 10, 11, 100, 101

Dezimalsystem: Zahlensystem, das auf der Zahl 10 basiert. Mögliche Ziffern: 0–9; Beispiel: 23, 122

Gerade Zahl: eine Zahl, die durch 2 teilbar ist; Beispiel: 2, 4, 6 ...

Hauptnenner: die kleinste Zahl, die ein Vielfaches der Nenner zweier Brüche ist; Beispiel: Hauptnenner von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist 6

Menge: eine Zusammenfassung verschiedener Elemente zu einer Gesamtheit; Beispiel: Menge der Zitrusfrüchte

Nenner: die Zahl unter einem Bruchstrich

Periodische Dezimalzahlen: Die Zahlen hinter dem Komma wiederholen sich nach einem Schema; Beispiel: $0,3 = 0,333...$ $0,245 = 0,245245245...$

Primzahl: eine Zahl, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist; Beispiel: 3, 5, 17, 19

Sechzigersystem: Zahlensystem, das auf der Zahl 60 basiert; ein Beispiel sind Zeitangaben: 12 h 30 min 22 s

Stellenwertsystem: Zahlensystem, bei dem die Ziffern je nach Stelle unterschiedlich gewichtet sind; Beispiel: Binärzahlen, Dezimalzahlen

Teiler: eine Zahl, durch die sich eine andere Zahl restlos teilen lässt; Beispiel: 1, 2, 4 sind Teiler von 4

Ungerade Zahl: eine Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist; Beispiel: 1, 3, 5...

Vielfache: ... einer Zahl erhält man, wenn diese mit 1, 2, 3 etc. multipliziert wird; Beispiel: Vielfache von 6 sind 6, 12, 18...

Zähler: die Zahl über einem Bruchstrich

Zahldarstellung: eine Zahl kann ganz unterschiedlich dargestellt werden; z. B. die Fünf als Dezimalzahl (5), Binärzahl (101), römische Zahl (V), , 

Zahlenfolge: Alle Folgenglieder unterliegen dem gleichen Bildungsgesetz, z. B. „Quadrieren“: 1, 4, 9, 16...

Zahlenreihe: Eine Summe mit unendlich vielen Summanden; alle Summanden unterliegen dem gleichen Bildungsgesetz, Beispiel: „die Zahl ist natürlich“: $1 + 2 + 3 + ...$

Ziffern: Zeichen, die man zur Zahldarstellung in einem Stellenwertsystem verwendet; Beispiel: Die Ziffern von 23 sind 2 und 3, die Ziffern von 101 sind 1, 0 und 1

LITERATURVERZEICHNIS, LESETIPPS UND LINKS

VERWENDETE LITERATUR

- Bardy, T., Bardy, P.:** Eine Zähltaufgabe für Viertklässler – viele Lösungsideen. In: *Grundschulunterricht* 2/2004, Friedrich Verlag, Seelze, S. 35–39.
- Benz, C., Peter-Koop, A., Grüßing, M.:** Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen. Springer Verlag, Münster 2015, S. 5.
- Bruner, J. S.:** Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin Verlag, Berlin 1974.
- Einsiedler, W.:** Das Spiel der Kinder. 3. Auflage, Klinkhardt, Bad Heilbrunn 1999.
- Gerster, H.-D.:** Wissenswertes zum Thema Rechenschwäche/Dyskalkulie. 2007, S. 16
<http://www.zahlbegriff.de/PDF/Gerster.pdf> Zugriff 22.01.16.
- Grassmann, M.:** „Bei uns in der Klasse gibt es Kinder, die noch mit den Fingern rechnen; stell Dir mal vor – so doof sind die.“ – Einige Bemerkungen zum „Fingerrechnen“. In: *Grundschulunterricht* 1/1997, Friedrich Verlag, Seelze, S. 25–29.
- Grevsmühl, U.:** Mathematik für Grundschullehrer. Ein Fernstudienlehrgang. Deutsches Institut für Fernstudienforschung an der Universität Tübingen 1995, S. 108–133
<http://www.grevsmuehl.de/material/forschung/2-1%20Allgemeine%20Studien/DIFF-Heft-%20PDFs/6.%20Multiplikation%20und%20Division.pdf>, Aufrufdatum 14.01.2016.
- Hauser, B., Rathgeb-Schierer, E., Stebler, R., Vogt, F. (Hrsg.):** Mehr ist mehr. Mathematische Frühförderung mit Regelspielen. Verlag Klett/Kallmeyer, Seelze 2015.
- Käpnick, F.:** Mathematisch begabte Kinder. Modelle empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Peter Lang Verlag, Frankfurt a.M. 1998
- Kultusministerkonferenz (Hrsg.):** Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004, 2005 http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf, Aufrufdatum 21.03.2016.
- Lee, K.:** Kinder erfinden Mathematik. Gestaltendes Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge. verlag das netz, Betrifft Kinder extra, Weimar, Berlin 2010.
- Lehmann, W. et al.:** Viel + wenig, groß + klein. In: *Kindergarten heute* 11/2006, Herder Verlag, Freiburg, S. 6–14
- Lorenz, J. H.:** Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung. Kohlhammer, Stuttgart 2012, S. 13 ff.
- Metcalf, R., Röckener, A.:** Zahlen, bitte! Eine musikalische Reise in die Welt der Zahlen. Terzio, München 2005.
- Padberg, F., Benz, C.:** Didaktik der Arithmetik: für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. Spektrum, Heidelberg 2011.
- Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., Ebeling, A.:** Handbuch für den Mathematikunterricht. Schroedel Verlag, Hannover 2000, S. 77 f.
- Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft (Hrsg.):** Berliner Bildungsprogramm für Kitas und Kindertagespflege. verlag das netz, Weimar, Berlin 2014, S. 138.
http://www.berlin.de/sen/bildung/bildungswege/vorschulische_bildung Aufrufdatum 30.03.2016.
- Schneider, W., Küspert, P., Krajewski, K.:** Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Schöningh, Paderborn 2013, S. 25.
- Selter, C., Spiegel, H.:** Wie Kinder rechnen. Klett Verlag, Leipzig 1997.

Spiegel, H., Selter, C.: *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten.* Kallmeyer, Seelze 2014.

Sundermann, B., Selter, C.: *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht.* Cornelsen, Berlin 2013.

Zech, F.: *Grundkurs Mathematikdidaktik, Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik.* 10. Auflage, Beltz Verlag, Weinheim, Basel 2002.

LESETIPPS UND LINKS

Demant, D.: *Eine Null im Alltag: Die erstaunliche Welt der Mathematik.* Arena Verlag, Würzburg 2011.

Enzensberger, H. M.: *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor Mathematik haben.* Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1999.

Fthenakis, W. E. (Hrsg.): *Natur-Wissen schaffen. Frühe Mathematische Bildung.* Bildungsverlag Eins, Troisdorf 2009.

Hille, A., Schäfer, D., Eisenbarth, P.: *Wie viel ist viel? Zählen, wiegen, messen.* 3. Auflage, Velber Verlag, Freiburg 2007.

Hoenisch, N.: *Mathe-Kings. Junge Kinder fassen Mathematik an.* verlag das netz, Kiliansroda 2007.

Kaufmann, S.: *Handbuch für die frühe mathematische Bildung.* Schroedel, Braunschweig 2010.

Newth, E.: *Die Krähe, die nicht bis 5 zählen konnte: Geschichten aus der tollen Welt der Zahlen.* Carl Hanser Verlag, München 2007.

Österreicher, H.: *Das Zahlenheft.* verlag das netz, Weimar, Berlin 2008.

Stiftung Rechnen (Hrsg.): *SUMMA. Das Magazin der Stiftung Rechnen, Jahresauftakt 2015.* Quickborn 2015.

Verein Deutscher Ingenieure e. V. (Hrsg.): *Mathematik. VDI n. Club-Magazin 03.2012.* VDI e. V., Düsseldorf 2012.

IM INTERNET

<https://www.youtube.com/watch?v=IXpGKHSYoUc> (Stand vom 17.03.2016) – Video zum Zählen auf Chinesisch

<http://bit.ly/25pygsQ> – Verblüffende Rechentricks und mehr über unser Zahlensystem

<http://bit.ly/1Sd8SAm> – Ein Finger-Trick: So rechnet ein Computer!

<http://kira.dzlm.de> – Kinder rechnen anders

<http://pikas.dzlm.de> – Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe

<http://www.zeit.de/2009/07/N-Bienen> – Können Tiere eigentlich rechnen? Ein Einblick in die aktuelle Tierforschung

APPS FÜRS TABLET

DragonBox Algebra 5+: WeWantToKnow AS, 2012 – Witzig und anschaulich Gleichungen lösen

Fiete Math: Ahoiii Entertainment, 2016 – Zusammen mit Seemann Fiete auf einer Abenteuerreise Zahlen zerlegen

Wiebkes Waage: Cobra Youth, 2016 – Wie viele Ameisen sind so schwer wie Kater Berleburg? Spielerisch Gleichungen aufstellen



DANKSAGUNG

In diese Broschüre sind viele fantasievolle Impulse und spannende Anregungen aus der Praxis eingeflossen. Die Kinder und pädagogischen Fach- und Lehrkräfte aus zahlreichen Piloteinrichtungen in Berlin und Brandenburg ermöglichten es, Praxisideen durch Hospitationen zu entwickeln und gemeinsam mathematischen Fragen nachzugehen. Dabei entstanden wunderbare Fotos, die die Aktivitäten der Mädchen und Jungen einfangen und veranschaulichen. Ein ganz besonderer Dank gilt folgenden Einrichtungen:

- GutsMuths-Grundschule in Berlin
- Kita „Heilige Familie“ in Berlin
- Grundschule im Hofgarten in Berlin
- Kita Teltower Damm in Berlin

Ein herzlicher Dank gilt auch Prof. Dr. Christoph Selter für seinen Fachbeitrag sowie PD Dr. David Ploog und Prof. Dr. Bernd Wollring für die Beratung bei der Entstehung des Mathematikkreises.



IMPRESSUM

© 2016 Stiftung „Haus der kleinen Forscher“, Berlin

1. Auflage

Herausgeber: Stiftung „Haus der kleinen Forscher“

Verantwortlich: Dr. Margret Lohmann

Projektleitung: Karen Brünger

Konzeption und Redaktion: Christine Günther, Andrea Kettner-Bierau

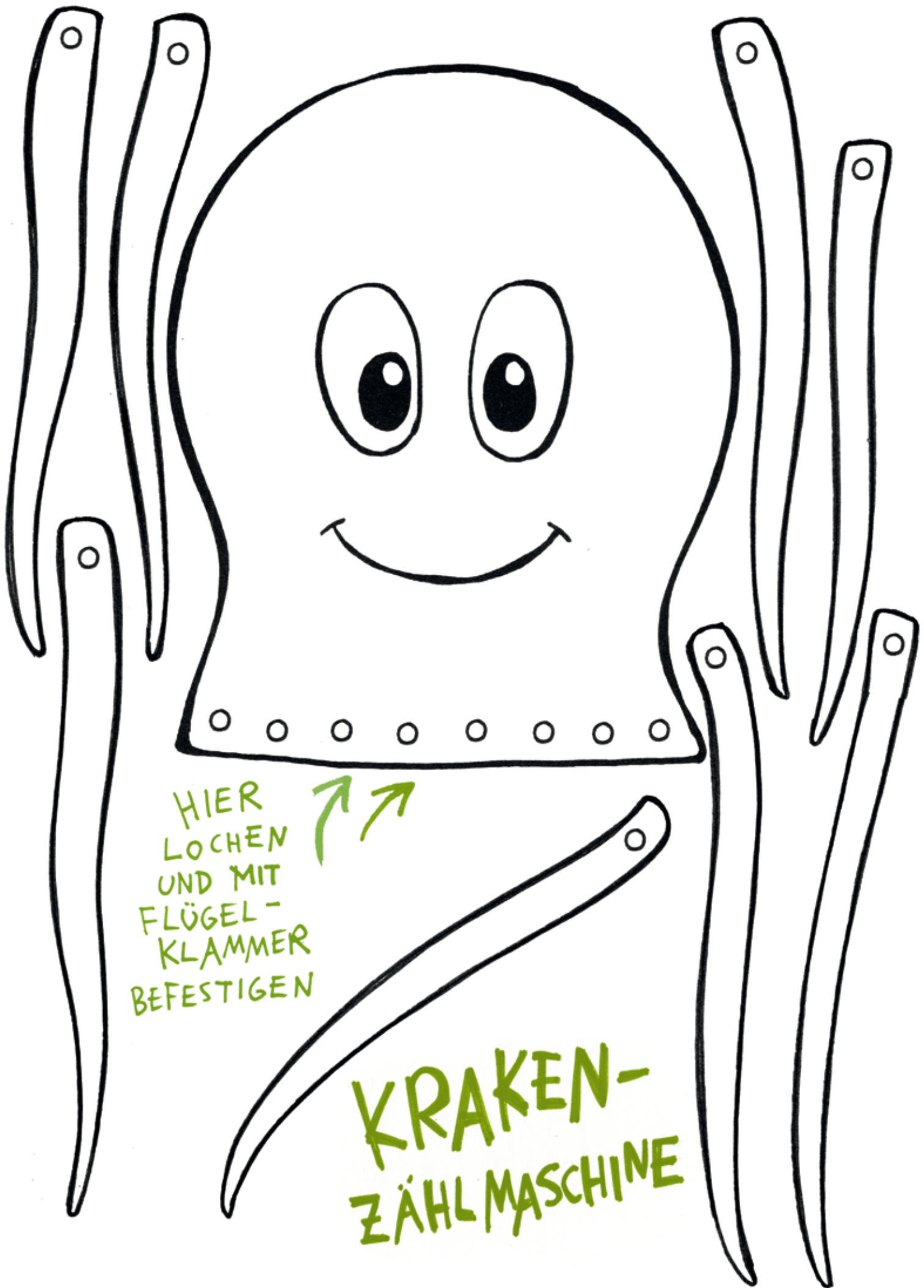
Produktionsleitung: Lisa Schaub

Illustration, Gestaltung und Layout: Tim Brackmann, Berlin

Druck: Bonifatius GmbH, Paderborn

Titelfoto: Christoph Wehrer, Berlin

Fotos: Seite: 9, 11, 12, 16 mitte, 18, 23, 25, 28, 29 unten, 32, 33 oben/unten, 34, 37, 38, 44 rechts oben, 45, 48, 49, 66: Christoph Wehrer, Berlin; Seite 4: KOPF & KRAGEN Fotografie, Berlin; Seite 16 links oben: Roland Badge, TU Dortmund; Seite 17, 29 oben, 32/33 großes Foto, 33 mitte, 35: Stiftung Haus der kleinen Forscher, Berlin; Seite 44 rechts: istockphoto.com; Seite 44 links unten: thinkstockphotos.de



HIER
LOCHEN
UND MIT
FLÜGEL-
KLAMMER
BEFESTIGEN



KRAKEN-
ZÄHLMASCHINE

Stiftung Haus der kleinen Forscher

Rungestraße 18
10179 Berlin

Tel 030 27 59 59 -0

Fax 030 27 59 59 -209

info@haus-der-kleinen-forscher.de

www.haus-der-kleinen-forscher.de



Dieses Druckerzeugnis
wurde mit dem Blauen
Engel gekennzeichnet.